

Tarea 2

1 de abril de 2010

Nombre:

1. Si G es un grupo cíclico infinito. Demuestra que G es isomorfo a todo subgrupo no trivial de él. ¿Es cierto el recíproco?
2. Si G es un grupo cíclico finito y k divide a $|G|$. Demuestra que existe un único subgrupo de G de orden k .
3. Considera $\mathbb{Z}_p$ con p primo.
 - a) Determina el orden de $\text{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$, el grupo de todas las matrices invertibles de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$.
 - b) Demuestra que $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ divide a $|\text{GL}(n, \mathbb{Z}_p)|$.
 - c) Muestra un subgrupo de $\text{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$, de orden $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
4. Sea $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dos elementos de $\text{GL}(2, \mathbb{R})$.
 - a) Demuestra que tanto el orden de a como de b son finitos y determina estos órdenes.
 - b) Considera $S = \{a^i b^j / i, j \in \mathbb{Z}\}$. Demuestra que S es subgrupo de $\text{GL}(2, \mathbb{R})$.
 - c) Demuestra que S es finito de orden 8.
 - d) Demuestra que S es isomorfo al grupo de simetrías del cuadrado.