

Análisis de Fourier

Auxiliar 6*

Prof: Michał Kowalczyk

Aux: Álvaro Hernández

5 de mayo de 2010

P.1. Validez de la solución de la ecuación de la cuerda vibrante

La serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx$$

con

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \\ B_n &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx \, dx \end{aligned}$$

converge uniformemente y absolutamente a la una solución de la ecuación de la cuerda vibrante con condiciones de borde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(0, t) &= 0 \quad u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{aligned}$$

siempre que se tenga:

- f de clase $C^2([0, \pi])$, con $f(0) = f''(0) = f(\pi) = f''(\pi) = 0$,
- g de clase $C^1([0, \pi])$, con $g(0) = g(\pi) = 0$.

P.2. Polinomios de Bernoulli

Defina los polinomios de Bernoulli $B_n(x)$ por la fórmula

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n.$$

2.1 Las funciones B_n son polinomios en x y

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

Muestre que $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - 1/2$, $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$, y $B_3(x) = x^3 - (3/2)x^2 + (1/2)x$.

*Basado en *Fourier Analysis*, Stein & Shakarchi Cáp. 3. erratas a ahernandez@dim.uchile.cl

2.2 Si $n \geq 1$ entonces

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1},$$

y si $n \geq 2$ entonces

$$B_n(0) = B_n(1) = B_n.$$

2.3 Defina $S_m(n) = 1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m$ y muestre que

$$(m+1)S_m(n) = B_{m+1}(n) - B_{m+1}.$$

2.4 Pruebe que los polinomios de Bernoulli son los únicos polinomios que cumplen:

- I. $B_0(x) = 1$,
- II. $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$ para todo $n \geq 1$,
- III. $\int_0^1 B_n(x) dx = 0$ para $n \geq 1$, y muestre a partir de 2.2 se tiene

$$\int_x^{x+1} B_n(t) dt = x^n.$$

2.5 Calcule la serie de Fourier de $B_1(x)$ para concluir que para $0 < x < 1$ se tiene que

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi kx}{k}.$$

Integrando se llega a que

$$\begin{aligned} B_{2n}(x) &= (-1)^{n+1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{k^{2k}}, \\ B_{2n+1}(x) &= (-1)^{n+1} \frac{2(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi kx}{k^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Finalmente, muestre que para $0 < x < 1$,

$$B_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i kx}}{k^n}.$$

Observe que los polinomios de Bernoulli son, salvo normalización, sucesivas integrales de la función sierra.