Análisis de Fourier
Auxiliar 4*

Prof: Michał Kowalczyk   Aux: Álvaro Hernández

21 de abril de 2010

P.1. Convergencia uniforme

Discuta la convergencia uniforme de las sucesiones de funciones $f_n(x) = nx(1-x)^n$ y $g_n(x) = n^2x(1-x)^n$ definidas en $[0, 1]$.

P.2. Algunas sumas

En el ejercicio 6 del capítulo 2 se vieron las sumas

$$\sum_{n \text{ impar} \geq 1} \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Sumas similares pueden ser derivadas usando métodos de este capítulo.

2.1 Sea f una función definida sobre $[-\pi, \pi]$ por $f(\theta) = |\theta|$. Use la Identidad de Parseval para encontrar las sumas de las siguientes series.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

De hecho valen $\pi^4/96$ y $\pi^4/90$ respectivamente.

2.2 Considere la función 2π-períodica definida en $[0, \pi]$ mediante $f(\theta) = \theta(\pi - \theta)$. Muestre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Observación: La expresión general cuando k es par para $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^k$ en términos de π^k es dado en el Problema 4 pág. 97 del libro. Sin embargo encontrar una fórmula para la suma $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$, o en general $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^k$ con k impar es un famoso problema abierto.

P.3. Igualdad de Parseval

Muestre que para α no entero la serie de Fourier de

$$\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i(\pi - x)\alpha}$$

sobre $[0, 2\pi]$ está dado por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n + \alpha}.$$

*Basado en *Fourier Analysis*, Stein & Shakarchi Cáp. 2. erratas a ahernandez@dim.uchile.cl

Aplique la fórmula de Parseval para mostrar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin n\alpha)^2}.$$

P.4. La cuerda vibrante

Considere el ejemplo de una cuerda vibrante analizado en el capítulo 1. El desplazamiento $u(x,t)$ de la cuerda en el tiempo t satisface la ecuación de onda

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 = \tau/\rho.$$

La cuerda está sujeta a las condiciones iniciales

$$u(x,0) = f(x) \text{ y } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),$$

donde se asume que $f \in C^1$ y g continua. Definimos la energía total de la cuerda mediante:

$$E(t) = \frac{1}{2}\rho \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\tau \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

El primer término corresponde a la *energía cinética* de la cuerda (en analogía a $mv^2/2$, la energía cinética de una partícula de masa m y velocidad v), y el segundo término corresponde a la *energía potencial*. Muestre que la energía total de la cuerda se conserva, en el sentido de que $E(t)$ es constante. Por lo tanto

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\rho \int_0^L g^2(x)\, dx + \frac{1}{2}\tau \int_0^L (f')^2(x)\, dx.$$

P.5. Desigualdades de Wirtinger y de Poincaré

Las desigualdades de Wirtinger y Poincaré establecen relaciones entre la norma de una función y su derivada.

5.1 Si f es T-períodica continua y C^1 a trozos con $\int_0^T f(t)\, dt = 0$, muestre que

$$\int_0^T |f(t)|^2\, dt \le \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(t)|^2\, dt,$$

con igualdad si y sólo si $f(t) = A\sin(2\pi t/T) + B\cos(2\pi t/T)$. Hint: use la igualdad de Parseval.

5.2 Si f es como antes y g es sólo C^1 y T-períodica, pruebe que

$$\left| \int_0^T \overline{f(t)} g(t)\, dt \right|^2 \le \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f(t)|^2\, dt \int_0^T |g'(t)|^2\, dt$$

5.3 Para cualquier intervalo compacto $[a,b]$ y cualquier función continuamente diferenciable f con $f(a) = f(b) = 0$ muestre que

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2\, dt.$$

Estudie esta desigualdad y muestre que la constante $(b-a)^2/\pi^2$ no puede mejorarse. Hint: Extender f imparmente con respecto a a y períodicamente con período $T = 2(b-a)$ de tal manera que la integral sobre un intervalo de largo T sea 0. Aplicar la parte 5.1 para ontener la desigualdad y concluir que la igualdad se mantiene si y sólo si $f(t) = A\sin\left(\pi\frac{t-a}{b-a}\right)$

P.6. Una integral

Pruebe que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$. Hint: Comience con el hecho de que la integral de $D_N(\theta)$ es igual a 2π, y note que la diferencia $(1/\sin(\theta/2)) - 2/\theta$ es continua en $[-\pi,\pi]$, y luego aplique el lema de Riemann Lebesgue.