Análisis de Fourier
Auxiliar 11

Prof: Michał Kowalczyk   Aux: Álvaro Hernández

23 de junio de 2010

P.1.

En el capítulo 5 se encontró que una solución del estado estacionario de la ecuación del calor en el semi plano superior con condición de borde f está dada por la convolución $u = f * \mathcal{P}_y$,

$$\mathcal{P}_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{donde } x \in \mathbb{R} \text{ e } y > 0.$$

el llamado kernel de Poisson. Con mayor generalidad se puede calcular el kernel de Poisson en d dimensiones usando la transformada de Fourier como sigue.

1.1 El *principio de subordinación* permite escribir expresiones del tipo e^{-x} en términos de e^{-x^2}, con mayor precisión

$$e^{-\beta} = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}} e^{-\beta^2/4u}\, du$$

donde $\beta \geq 0$. Pruebe esta identidad con $\beta = 2\pi|x|$.

1.2 Considere el problema

$$\begin{aligned} \Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ u = u(x,y) \quad x \in \mathbb{R}^d \quad & y \in \mathbb{R} \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

Una solución está dado por la convolución $u(x,y) = (f * \mathcal{P}_y^d)(x)$ donde $\mathcal{P}_y^d$ es el kernel d dimensional

$$\mathcal{P}_y^d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi} e^{-2\pi|\xi| y}\, d\xi.$$

Calcule el $\mathcal{P}_y^d$ usando el principio de subordinación y el kernel del calor d dimensional. Muestre que

$$\mathcal{P}_y^d(x) = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}} \frac{y}{(|x|^2+y^2)^{(d+1)/2}}.$$

P.2.

Suponga que $d \geq 2$ y que $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^0(\mathbb{R}^d)$ radial y de variables separadas. Muestre que $f(x) = Ae^{-B|x|^2}$ para algunos A y $B > 0$.

P.3.

3.1 Suponga que $f \in L^2(\mathbb{R})$ cumple la condición

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)|^2 \, dx \leq C h^{2\alpha}$$

donde $C > 0$, $\alpha > 1/2$ y h pequeño. Muestre que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

3.2 ¿Se puede generalizar a d dimensiones?

3.3 Suponga que para algún $\alpha \in (0,1)$ y algún $C > 0$ se tiene $\|f - f_h\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C h^{\alpha}$ para todo $h > 0$. Pruebe que $\int_{|\xi|>M} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \leq \bar{C} M^{-2\alpha}$ para todo $M > 0$ y algún $\bar{C} > 0$

P.4.

Sea $\mathcal{A} = \{\hat{f} : f \in L^1(\mathbb{R})\}$ dotado con la norma $\|\hat{f}\|_{\mathcal{A}} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Muestre que para $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se tiene

$$\lim_{\delta \to 0} \|(\hat{f} - \hat{f}(0)) G_\delta\|_{\mathcal{A}} = 0$$

donde $G_\delta(\xi) = G(\xi/\delta)$ y $G = \hat{g}$, ¿Se pueden relajar las condiciones sobre f y g?, se puede generalizar a d dimensiones?