Análisis de Fourier
Auxiliar 12

Prof: Michał Kowalczyk   Aux: Álvaro Hernández

30 de junio de 2010

P.1.

1.1 Suponga que $f \in L^2(\mathbb{R})$ cumple la condición

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)|^2 \, dx \leq Ch^{2\alpha}$$

donde $C > 0$, $\alpha > 1/2$ y h pequeño. Muestre que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

1.2 ¿Se puede generalizar a d dimensiones?

1.3 Suponga que para algún $\alpha \in (0,1)$ y algún $C > 0$ se tiene $\|f - f_h\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq Ch^\alpha$ para todo $h > 0$. Pruebe que $\int_{|\xi|>M} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \leq \bar{C} M^{-2\alpha}$ para todo $M > 0$ y algún $\bar{C} > 0$

P.2.

Sea $\mathcal{A} = \{\hat{f} : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\}$ dotado con la norma $\|\hat{f}\|_{\mathcal{A}} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Muestre que para $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se tiene

$$\lim_{\delta \to 0} \|(\hat{f} - \hat{f}(0)) G_\delta\|_{\mathcal{A}} = 0$$

donde $G_\delta(\xi) = G(\xi/\delta)$ y $G = \hat{g}$, ¿Se pueden relajar las condiciones sobre f y g?, se puede generalizar a d dimensiones?

P.3. Fórmula de Sumación de Poisson

Muestre que para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se tiene

$$\bar{f}(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(n) e^{2\pi i k \cdot x}$$

¿Se puede relajar la condición sobre f?

P.4.

Suponer $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tal que tanto $\operatorname{supp} f$ como $\operatorname{supp} \hat{f}$ son intervalos (en $\mathbb{R}^d$) acotados. Determine completamente a f.