

Análisis de Fourier

Auxiliar 9*

Prof: Michał Kowalczyk

Aux: Álvaro Hernández

2 de junio de 2010

P.1. Versión simplificada del Teorema de Inversión de Fourier

Sea $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ y $\text{supp } f = [-M, M]$ y además $\hat{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$

1.1 Sea $L > M/2$, muestre que $f(x) = \sum a_n(L) e^{2\pi i n x / L}$, donde

$$a_n(L) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx$$

1.2 Pruebe que si $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) d\xi = \lim_{\delta \rightarrow 0, \delta > 0} \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\delta n)$$

1.3 Concluir el teorema.

P.2. La transformada de Fourier de f puede tener sentido pese a que $f \notin \mathcal{C}^0$

Sean f y g definidas por

$$f = \chi_{[-1,1]} \quad g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Encuentre las transformadas de Fourier de estas funciones, en particular $\hat{f}(0) = 2$, $\hat{g}(0) = 1$.

P.3. [Decaimiento de $\hat{f}$] $\sim$ [Continuidad de f]

3.1 Suponer que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\xi|^{1+\alpha}}\right) \quad \text{cuando } |\xi| \rightarrow \infty$$

para algún $0 < \alpha < 1$. Pruebe que f es α -Hölder.

3.2 Sea f continua en $\mathbb{R}$ que desaparece para $|x| \geq 1$ con $f(0) = 0$ y que es igual a $1/\log(1/|x|)$ para x en una vecindad del origen. Pruebe que $\hat{f} \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$. De hecho, no existe $\varepsilon > 0$ tal que $\hat{f}(\xi) = \mathcal{O}(1/|\xi|^{1+\varepsilon})$ cuando $|\xi| \rightarrow \infty$

*Basado en *Fourier Analysis*, Stein & Shakarchi Cáp. 5. erratas a ahernandez@dim.uchile.cl

P.4.

4.1 Pruebe que si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ entonces $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ cuando $|\xi| \rightarrow \infty$.

4.2 Si $x^k f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ y $\hat{f}^{(k)} = [(2\pi i x)^k f]^\wedge$

4.3 Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ y $f^{(k)} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2\pi i \xi)^k \hat{f}(\xi)$

4.4 Pruebe que si f como en 4.1 y $\hat{f} \equiv 0$ entonces $f \equiv 0$.