Análisis de Fourier
Auxiliar 5*

Prof: Michał Kowalczyk   Aux: Álvaro Hernández

28 de mayo de 2010

En los dos primeros problemas supondremos que la serie de Fourier de una función f puede escribirse mediante

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

P.1. Diferenciación de la serie de Fourier término a término

Sea f 2π-períodica con f' suave. Entonces

1.1 La serie que se obtiene al diferenciar la serie de Fourier de f término a término converge puntualmente a f'.

1.2 La serie de Fourier de f converge uniformemente.

P.2. Integración de la serie de Fourier término a término

Suponga que f es 2π-períodica y suave. Asumir que el primer coeficiente de Fourier de f, esto es a_0, es cero y defina

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt,$$

entonces la serie de Fourier de F se obtiene integrando término a término la serie de Fourier de f, salvo por el primer coeficiente que viene dado por

$$A_0 = -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} x f(x)\,dx.$$

¿Es necesaria la condición $a_0 = 0$?

P.3.

Suponga que f es períodica y de clase C^k. Muestre que

$$\hat{f}(n) = o(1/|n|^k).$$

Hint: Lema de Riemann-Lebesgue.

*Basado en *Fourier Analysis*, Stein & Shakarchi Cáp. 3. erratas a ahernandez@dim.uchile.cl

P.4.

Si f es acotada, monótona sobre $[-\pi,\pi]$ entonces

$$\hat{f}(n)=\mathcal{O}\left(1/|n|\right).$$

Hint: se puede asumir f creciente y con cota M. Primero verificar que los coeficientes de la función característica sobre $[a,b]$ satisface $\mathcal{O}\left(1/|n|\right)$. Ahora muestre que una suma de la forma

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{[a_k,a_{k+1}]}(x)$$

con $-\pi=a_1<a_2<\cdots<a_N<a_{N+1}=\pi$ y $-M\leq\alpha_1\leq\cdots\leq\alpha_N\leq M$ tiene coeficientes de Fourier que son $\mathcal{O}\left(1/|n|\right)$ uniformemente en N. Sumando por partes uno obtiene una suma telescópica $\sum(\alpha_{k+1}-\alpha_k)$ que puede ser acotado por $2M$. Ahora aproxime f por funciones de este tipo.

P.5.

Dé otra demostración de que la suma $\sum_{0<|n|\leq N}(e^{inx})/n$ es uniformemente acotada en N y $x\in[-\pi,\pi]$ usando el hecho que

$$\frac{1}{2i}\sum_{0<|n|\leq N}\frac{e^{inx}}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}=\int_0^x\left(D_N(t)-1\right)dt,$$

donde D_N es el kernel de Dirichlet. Ahora use el hecho que $\int_0^\infty(\sin t)/t\,dt<\infty$.

P.6.

Sea f la función onda de sierra definida por $f(x)=(\pi-x)/2$ sobre $(0,2\pi)$ con $f(0)=0$ y extendida períodicamente a todo $\mathbb{R}$. La serie de Fourier de f es

$$f(x)\sim\frac{1}{2i}\sum_{|n|\neq0}\frac{e^{inx}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},$$

y f tiene un salto de discontinuidad en el origen con:

$$f(0^+)=\frac{\pi}{2},\qquad f(0^-)=-\frac{\pi}{2}\qquad\text{y por lo tanto}\qquad f(0^+)-f(0^-)=\pi.$$

Muestre que

$$\max_{0<x\leq\pi/n}S_N(f)(x)-\frac{\pi}{2}=\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}\,dt-\frac{\pi}{2},$$

lo que es aproximadamente 9 % del salto π. Este resultado es una manifestación del fenómeno de Gibbs que asegura que cerca de un salto de discontinuidad la serie de Fourier de una función "se pasa" (o está bajo) un 9 % del salto de discontinuidad.

P.7.

Para cada $0<\alpha<1$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}$$

converge para cada x, pero no es la serie de Fourier de una función Riemann integrable.

7.1 Si el conjudado del kerner de Dirichlet se define por

$$\bar{D}_N(x)=\sum_{|n|\leq N}\operatorname{sign}(x)e^{inx},\qquad\text{donde }\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|} & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

entonces muestre que

$$\bar{D}_N(x) = \frac{\cos x/2 - \cos((N+1/2)x)}{\sin x/2},$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{D}_N(x)|\, dx \leq c \log N.$$

7.2 Como un resultado, si f es Riemann integrable entonces

$$(f * \bar{D}_N)(0) = \mathcal{O}\left(\log N\right).$$

7.3 En nuestro caso esto daría

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} = \mathcal{O}\left(\log N\right),$$

que es una contradicción.