Análisis de Fourier
Auxiliar 3

Prof: Michał Kowalczyk   Aux: Álvaro Hernández

P.1. Compacidad

Demostrar que $K \subset \mathbb{R}$ es compacto si y sólo si para todo cubrimiento abierto de K existe un subcubrimiento finito.

P.2. Convergencia Uniforme

De aquí en adelante $\{f_n\}$ denotará una sucesión de funciones definidas en $[a, b]$.

2.1 Demostrar que si f_n son continuas entonces $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en $[a, b]$ si y sólo si $\varepsilon_n = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$ converge a cero cuando $n \to \infty$.

2.2 El límite uniforme de funciones continuas es una función continua.

2.3 ¿Se tiene el mismo resultado si suponemos que la convergencia es puntual?

2.4 Si $f_n \to f$ uniformamente en $[a, b]$, f_n son Riemann integrables enotnces f es Riemann integrable y $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$.

2.5 Suponer que f_n son diferenciables y que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f, si además f_n' converge uniformamente a una función continua g, entonces f es diferenciable y $f' = \lim_{n\to\infty} f_n$. Además demostrar que basta suponer que $f_n(x)$ converge en un punto $x_0 \in [a, b]$ para llegar a la misma conclusión.

2.6 ¿Se llega a la misma conclusión si suponemos que f_n converge uniformamente a f?

P.3. Existen funciones continuas en todo punto y diferenciables en ninguno.

3.1 Prueba M de Weierstrass: sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definida en $A \subset \mathbb{R}$. Suponer que $\{M_n\}$ es una sucesión de números tales que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in A$, suponer además que $\sum M_n$ converge. Entonces para todo $x \in A$ la serie $\sum f_n(x)$ converge (de hecho converge absolutamente) y $\sum f_n$ converge uniformemente en A a la función $f(x) = \sum f_n(x)$.

3.2 Definamos

$$f_n(x) = \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$$

donde $\{x\}$ es la distancia de x al entero más cercano. Muestre que $\sum f_n$ converge uniformemente a una función continua.

3.3 Demostrar que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$$

no es diferenciable en ningún punto. Para ello siga basta encontrar una sucesión $\{h_m\}$ que converge a cero tal que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(a + h_m) - f(a)}{h_m}$$

no exista.

I. Suponer $a \in (0,1]$ y considerar su expansión decimal: $a = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$. Definir $h_m = 10^{-m}$ si $a_m \neq 4$ ó 9, $h_m = -10^{-m}$ si $a_m = 4$ ó 9. Muestre que si $n \geq m$ entonces $[f(a+h_m) - f(a)]/h_m$ es en realidad una suma finita de términos.

II. Muestre que si $n < m$ entonces $\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\} = \pm 10^{n-m}$.

III. Estudie la paridad de $[f(a+h_m) - f(a)]/h_m$ para concluir.