

Análisis de Fourier

Auxiliar 2

Prof: Michał Kowalczyk

Aux: Álvaro Hernández

7 de abril de 2010

P.1. Criterio de Dirichlet para la convergencia de Series

Suponga que $\{a_n\}_{n=1}^N$ y $\{b_n\}_{n=1}^N$ son dos sucesiones finitas de números complejos. Sea $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$ la suma parcial de la serie $\sum b_n$ con la convención de que $B_0 = 0$. Pruebe la siguiente fórmula de suma por partes

$$\sum_{n=M}^N a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

A partir de esta fórmula deducir la prueba de convergencia para series de Dirichlet: si las sumas parciales de la serie $\sum b_n$ son acotadas y si $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales que decrece a cero, entonces $\sum a_n b_n$ converge.

P.2. A mayor suavidad, más rápido es el decaimiento de los coeficientes de Fourier

Suponga que f es una función 2π periódica y de clase C^k . Muestre que

$$\hat{f}(n) = \mathcal{O}(1/|n|^k) \text{ cuando } |n| \rightarrow \infty$$

P.3. Convergencia en L^1 implica convergencia de los coeficientes de Fourier

Suponga que $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ es una sucesión de funciones Riemann integrables sobre el intervalo $[0, 1]$ tales que

$$\int_0^1 |f_k(x) - f(x)| dx \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Muestre que $\hat{f}_k(n) \rightarrow \hat{f}(n)$ uniformemente en n cuando $k \rightarrow \infty$.

P.4. Convergente $\Rightarrow$ Cesàro Sumable $\Rightarrow$ Abel Sumable

El propósito de este ejercicio es mostrar que la sumabilidad según Abel es más fuerte que los métodos estándar de Cesàro.

4.1 Pruebe que si una serie de números complejos $\sum c_n$ converge a s entonces $\sum c_n$ es sumable Cesàro a s .

4.2 Dé un ejemplo de una serie que sea Cesàro sumable, pero no convergente.

4.3 Muestre que si la serie de números complejos $\sum_{n=1}^\infty c_n$ converge a un límite finito s entonces la serie es sumable Abel a s . Para ello siga los pasos:

- I. Muestre que si $s_{N+1} = c_0 + \dots + c_N$, $s_0 = 0$ entonces $\sum_{n=0}^N c_n r^n = (1-r) \sum_{n=0}^{N-1} s_{n+1} r^n + s_{N+1} r^N$.
- II. Haciendo tender N a infinito muestre que $\sum c_n r^n = (1-r) \sum s_n r^n$.
- III. Finalmente muestre que el lado derecho converge a cero cuando $r \rightarrow 1$.

4.4 Sin embargo existen series sumables Abel que no convergen.

4.5 Argumente de la manera similar para mostrar que si una serie $\sum_{n=1}^\infty c_n$ es Cesàro sumable a σ entonces es Abel sumable a σ . (Hint: notar que $\sum c_n r^n = (1-r)^2 \sum n \sigma_n r^n$, donde σ_n es la n -ésima media de Cesàro de $\{c_n\}$)

4.6 Dé un ejemplo de una serie que sea Abel sumables pero no Cesàro sumable. (Hint: tratar con $c_n = (-1)^{n-1}n$. Notar que si $\sum c_n$ es Cesàro sumable entonces c_n/n tiende a cero.)

4.7 El teorema de Tauber que dice que bajo ciertas condiciones adicionales sobre los coeficientes c_n las flechas de arriba pueden invertirse

- I. Si $\sum c_n$ es Cesàro sumable a σ y $c_n = o(1/n)$, i.e. $nc_n \rightarrow 0$, entonces $\sum c_n$ converge a σ (Hint: $s_n - \sigma_n = [(n-1)c_n + \dots + c_2]/n$.)
- II. La afirmación anterior sigue siendo válida si se reemplaza Cesàro sumable por Abel sumable. (Hint: Estime la diferencia entre $\sum_{n=1}^N c_n$ y $\sum_{n=1}^N c_n r^n$ con $r = 1 - 1/N$.)

P.5. Kernel de Fejér

Pruebe que el kernel de Fejér está dado por

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}.$$

Hint: Recuerde que $NF_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)$, donde $D_n(x)$ es el kernel de Dirichlet. Luego si $\omega = e^{ix}$ entonces

$$NF_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\omega^{-n} - \omega^{n+1}}{1 - \omega}.$$

P.6. Funciones Riemman integrables con discontinuidades en un denso numerable

Uno puede construir funciones Riemman integrables en $[0, 1]$ que tanga un conjunto denso de discontinuidades como sigue:

- 6.1 Sea $f(x) = 0$ cuando $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x \geq 0$. Elija una sucesión $\{r_n\}$ en $[0, 1]$ que sea densa numerable. Entonces la función

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f(x - r_n)$$

es Riemman integrables y tiene discontinuidad en r_n para todo n . (Hint: F monótona y acotada)

- 6.2 Luego considere

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} g(x - r_n)$$

donde $g(x) = \sin 1/x$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$. Entonces F es integrable, discontinua en cada r_n y no es monótona en cada subintervalo de $[0, 1]$. Hint: use el hecho que $3^{-k} > \sum_{n>k} 3^{-n}$

- 6.3 El ejemplo original de Riemman es la función

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

donde $(x) = x$ para $x \in (-1/2, 1/2]$ y extendida a $\mathbb{R}$ periódicamente, esto es $(x+1) = (x)$. Se puede mostrar que F es discontinua en $x = m/2n$ para $n, m \in \mathbb{Z}$ con m impar y $n \neq 0$.

P.7. El kernel de Dirichlet no es un buen kernel

Sea D_N el kernel de Dirichlet

$$D_N(\theta) = \sum_{k=-N}^N e^{ik\theta} = \frac{\sin((N+1/2)\theta)}{\sin \theta/2},$$

y defina

$$L_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\theta)| d\theta.$$

7.1 Pruebe que

$$L_N \geq c \log N$$

para alguna constante $c > 0$. Para ello siga los siguientes pasos:

I. Muestre que

$$|D_N(\theta)| \geq c \frac{\sin((N+1/2)\theta)}{|\theta|}$$

II. Cambie de variables y muestre que

$$L_N \geq c \int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin \theta|}{|\theta|} d\theta + \mathcal{O}(1).$$

III. Escriba la integral como una suma $\sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}$ y finalmente use el hecho que $\sum_{k=1}^n 1/k \geq c \log n$.

Una estimación más cuidadosa da

$$L_N = \frac{4}{\pi^2} \log N + \mathcal{O}(1)$$

7.2 Pruebe lo siguiente como una consecuencia: para cada $n \geq 1$ existe una función continua f_n tal que $|f_n| \leq 1$ y $|S_n(f_n)(0)| \geq c' \log n$. Hint: la función g_n que es igual a 1 cuando D_n es positivo y -1 cuando D_n es negativo tiene la propiedad deseada, pero no es continua. Aproxime g_n en norma integral (en el sentido del Lema 3.2 del texto) con funciones continuas h_k con $|h_k| \leq 1$.