MA2601-6 Enunciado Clase Auxiliar

Prof. Patricio Felmer
Prof. Aux.: Darío Valdebenito

11 de junio de 2010

Problema 1

Resuelva el sistema lineal $x' = Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problema 2

(a) Encuentre la matriz exponencial de

$$\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$$

(b) Para todo $v \in \mathbb{R}^3$ encuentre $e^{tA}v$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema 3

(a) Resuelva mediante el método de valores y vectores propios generalizados el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} x \tag{1}$$

(b) Usando variación de parámetros resuelva ahora el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t t^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Indicación: *Use el hecho que si X es la matriz fundamental de* (1), *entonces*

$$X^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -1 - \frac{1}{2}t^2 & -t + \frac{1}{2}t^2 - 1 & \frac{1}{2}t^2 - 2t \\ -2 - t & -1 - t & -t \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Problema 3, parte (b)

Tenemos que

$$X^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -1-\frac{1}{2}t^2 & -t+\frac{1}{2}t^2-1 & \frac{1}{2}t^2-2t \\ -2-t & -1-t & -t \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Multiplicando por el término (vector) que no tiene x,

$$X^{-1}(t)b(t) = \begin{pmatrix} -t^{-3}-\frac{1}{2}t^{-1} \\ -2t^{-3}-t^{-2} \\ t^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int X^{-1}(t)b(t)dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^{-2}-\frac{1}{2}\log t \\ t^{-2}+t^{-1} \\ -\frac{1}{2}t^{-2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} X_p(t) &= X(t)\int X^{-1}(t)b(t)dt \\ &= \frac{e^t}{4}\begin{pmatrix} \frac{1}{t^2}\left[3t^2-2t-2-2t^2\ln t\right] \\ \frac{4t\ln t-6t+2}{t} \\ -2\ln t+3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y la solución general del problema, para $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$, es

$$x(t) = X(t)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + X_p(t)$$