MA2601-6 Soluciones de la *Auxiliar 0*

Prof. Patricio Felmer
Prof. Aux.: Darío Valdebenito

30 de marzo de 2010

Problema 1

Poniendo las y a un lado,

$$\begin{aligned}
\frac{yy'}{1+y^2} &= -\sin t \\
\frac{ydy}{1+y^2} &= -\sin t\,dt \\
\int \frac{ydy}{1+y^2} &= -\int \sin t\,dt + C \\
\frac{1}{2}\ln(1+y^2) &= \cos t + C \\
\ln(1+y^2) &= 2\cos t + C \\
1+y^2 &= e^{2\cos t}e^C \\
1+y^2 &= Ce^{2\cos t} \\
y^2 &= Ce^{2\cos t} - 1 \\
y &= \pm\sqrt{Ce^{2\cos t} - 1}
\end{aligned}$$

Imponiendo $y(0) = 1$,

$$\begin{aligned}
y(0) &= 1 \\
&= \pm\sqrt{Ce^2 - 2} \\
\Rightarrow C &= 2e^{-2}
\end{aligned}$$

y tomamos el signo $+$. Por lo tanto, la solución del problema es

$$y(t) = \sqrt{2e^{2\cos t - 2} - 1}$$

Para encontrar el intervalo maximal de existencia de la solución necesitamos que lo que está bajo la raíz sea positivo (insistimos: en este curso buscamos soluciones **reales**):

$$\begin{aligned}
2e^{2\cos t - 2} - 1 &\geq 0 \\
2\cos t - 2 &\geq \ln\frac{1}{2} \\
\cos t &\geq -\ln\sqrt{2} + 1
\end{aligned}$$

esto es, $|t| \leq \arccos\left(1 - \ln\sqrt{2}\right)$, puesto que $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ es decreciente.

Problema 2

Dividiendo por x,

$$y' - \frac{y}{x} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

Sea $\omega(x) := \frac{y(x)}{x}$ (escribimos la dependencia en x para que quede claro qué ocurre al derivar), para $x > 0$. Entonces

$$\omega'(x) = \frac{xy' - y}{x^2}$$

Despejando,

$$y' = x\omega' + \frac{y}{x} = x\omega' + \omega.$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned}
x\omega' + \omega - \omega &= \sqrt{1+\omega^2} \\
x\omega' &= \sqrt{1+\omega^2} \\
\frac{d\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} &= \frac{dx}{x} \\
\int \frac{d\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} &= \int \frac{dx}{x} + C \\
\operatorname{arc\,sinh} \omega &= \log x + C \qquad (¡x > 0!) \\
\omega &= \sinh(\log x + C) \\
\omega &= \frac{1}{2}\left(e^C x - \frac{e^{-C}}{x}\right)
\end{aligned}$$

Pero nos interesa y, no ω. Reemplazando,

$$y = \frac{1}{2}\left(e^C x^2 - e^{-C}\right)$$

Evaluando en $x = 1$,

$$y(1) = 0 = \frac{1}{2}\left(e^C - e^{-C}\right)$$

de modo que $C = 0$, y la solución

$$y(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$$

está definida en todo $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. No obstante, si introducimos y en la ecuación original, la solución es válida en todo $\mathbb{R}$. La importancia de tener $x > 0$ durante la resolución es que en rigor $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$.