MA2601-6 Enunciado Clase Auxiliar

Prof. Patricio Felmer
Prof. Aux.: Darío Valdebenito

31 de mayo de 2010

Problema 1

Definimos la *derivada* de la delta de Dirac centrada en $a > 0$ para $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty), \mathbb{R})$ mediante la relación (¡claramente no es una función!)

$$\int_0^{+\infty} \delta'(x-a) f(x) dx = -f'(a)$$

(a) Calcule la transformada de Laplace de δ'.

(b) Resuelva la ecuación

$$y'' + y = \delta'(x-a), \quad y(0) = y'(0) = 0 \tag{1}$$

Problema 2

(a) Encuentre funciones $f_1, f_2 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tales que

$$\mathcal{L}[f_1](s) = \ln \frac{s^2-1}{s^2+1} \text{ y } \mathcal{L}[f_2](s) = \frac{1}{(s^2+1)^3}$$

(b) Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2k \leq x < 2k+1, k \in \{0, \ldots, 9\} \\ 0 & \text{si } 2k+1 \leq x < 2k+2, k \in \{0, \ldots, 9\} \\ 1 & \text{si } x \geq 20 \end{cases}$$

Encuentre la solución del problema de condición inicial en $[0, +\infty)$

$$y'' + y = f, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0 \tag{2}$$

Problema 3

Mediante transformada de Laplace encuentre una solución del problema

$$xy'' + 2(x-1)y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1 \tag{3}$$

$\mathcal{L}(f)[s] := \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$	$\mathcal{L}(f^{(n)})[s] = s^n \mathcal{L}(f)[s] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0)$
$\mathcal{L}(f)[s-a] = \mathcal{L}(e^{ax} f(x))[s]$	$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (\mathcal{L}(f)[s])$
$\mathcal{L}(H_a(t) f(t-a))[s] = e^{-as} \mathcal{L}(f)[s]$	$\mathcal{L}(f * g)[s] = \mathcal{L}(f)[s] \mathcal{L}(g)[s]$
$\mathcal{L}(e^{ax})[s] = \frac{1}{s-a}, \ s > a$	$\mathcal{L}(\sin ax)[s] = \frac{a}{s^2+a^2}$
$\mathcal{L}(x^\lambda)[s] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}}$	$\mathcal{L}(\cos ax)[s] = \frac{s}{s^2+a^2}$
$\mathcal{L}(\delta_a)[s] = e^{-sa}$	$\mathcal{L}(H_a)[s] = e^{-sa}/s$

Desarrollos pendientes

Convolución $\sin x * \sin x * \sin x$

Recordemos que

$$\sin x * \sin x = -\frac{1}{2} x \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(\sin x * \sin x) * \sin x &= \int_0^x (\sin x * \sin x)(t) \sin(x-t) dt \\
&= \int_0^x \left(-\frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2} \sin t \right) \sin(x-t) dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^x t \cos t \sin(x-t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x \sin t \sin(x-t) dt
\end{aligned}$$

Notemos que la segunda integral es igual a $\frac{1}{2} \sin x * \sin x$, de modo que no necesitamos calcular esa integral. En cuanto al primer término,

$$\begin{aligned}
\int_0^x t \cos t \sin(x-t) dt &= \frac{1}{2} t^2 \cos t \sin(x-t) \Big|_{t=0}^{t=x} + \frac{1}{2} \int_0^x t^2 (\sin t \sin(x-t) + \cos t \cos(x-t)) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^x t^2 \cos(x-2t) dt \\
&= \frac{1}{4} t^2 \sin(2t-x) \Big|_{t=0}^{t=x} - \frac{1}{2} \int_0^x t \sin(2t-x) dt \\
&= \frac{1}{4} x^2 \sin x - \frac{1}{2} \int_0^x t \sin(2t-x) dt \\
&= \frac{1}{4} x^2 \sin x - \frac{1}{2} \left(\frac{-t}{2} \cos(2t-x) \Big|_{t=0}^{t=x} + \frac{1}{2} \int_0^x \cos(2t-x) dt \right) \\
&= \frac{1}{4} x^2 \sin x - \frac{1}{2} \left(\frac{-x}{2} \cos x + \frac{1}{4} \sin(2t-x) \Big|_{t=0}^{t=x} \right) \\
&= \frac{1}{4} x^2 \sin x - \frac{1}{2} \left(\frac{-x}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) \\
&= \frac{1}{4} x^2 \sin x + \frac{x}{4} \cos x - \frac{1}{4} \sin x
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(\sin x * \sin x) * \sin x &= \frac{-x^2}{8} \cos x - \frac{x}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x - \frac{x}{4} \cos x + \frac{1}{4} \sin x \\
&= -\frac{x^2}{8} \sin x - \frac{3}{8} x \cos x + \frac{3}{8} \sin x
\end{aligned}$$

Cálculo de $x * xe^{-2x}$

Calculemos primero dos integrales (¡por partes!):

$$\begin{aligned}
\int_0^x te^{-2t}dt &= \frac{-1}{2}te^{-2t}\Big|_{t=0}^{t=x} + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}dt \\
&= \frac{-1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}(e^{-2x}-1) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}, \\
-\int_0^x t^2e^{-2t}dt &= \frac{1}{2}t^2e^{-2t}\Big|_{t=0}^{t=x} + \int_0^x te^{-2t}dt \\
&= \frac{x^2}{2}e^{-2x} + \frac{1}{4} - \frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
y(x) &= Cx * xe^{-2x} \\
&= C\int_0^x (x-t)te^{-2t}dt \\
&= Cx\int_0^x te^{-2t}dt - C\int_0^x t^2e^{-2t}dt \\
&= C\left[\frac{x}{4} - \frac{x^2}{2}e^{-2x} - \frac{x}{4}e^{-2x} + \frac{x^2}{2}e^{-2x} + \frac{1}{4} - \frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]
\end{aligned}$$

Simplificando esta expresión llegamos al resultado que vimos en la clase.