MA2601-6 Enunciado Clase Auxiliar

Prof. Patricio Felmer
Prof. Aux.: Darío Valdebenito

14 de mayo de 2010

Problema 1

En lo que sigue usaremos el *teorema de Fuchs*: sean p, q analíticas en x_0 con radios de convergencia ρ_p, ρ_q, respectivamente. Entonces la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ posee dos soluciones l.i. analíticas en x_0, que denotaremos

$$y_\ell(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{\ell,k}(x - x_0)^k, \ \ell \in \{1, 2\}$$

y el radio de convergencia de estas soluciones es $\rho \geq \text{mín}\{\rho_p, \rho_q\}$. Usando este teorema,

(a) Encuentre el radio mínimo de la solución en torno a $x_0 = 3$ de

$$(x^2 - 2x + 5)y'' + xy' + x^2 y = 0$$

(b) Resuelva en torno a $x_0 = 0$ el problema

$$2y'' + xy' + y = 0$$

Problema 2

Resuelva el problema de condición inicial

$$y' + 6y + 9\int_0^x y(t)dt = 1, \ y(0) = 0 \tag{1}$$

Problema 3

Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función T-periódica; i.e. $f(t + T) = f(t)\ \forall t \geq 0$. Pruebe que si f es continua por tramos y de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-su} f(u)du \tag{2}$$

Use esta fórmula para calcular la transformada de Laplace de $f(x) := \frac{1}{2}(1 - (-1)^{\lfloor x \rfloor})$

$\mathcal{L}(f)[s] := \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx$	$\mathcal{L}(f^{(n)})[s] = s^n \mathcal{L}(f)[s] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0)$
$\mathcal{L}(f)[s-a] = \mathcal{L}(e^{ax} f(x))[s]$	$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}(f)[s])$
$\mathcal{L}(H_a(t)f(t-a))[s] = e^{-as}\mathcal{L}(f)[s]$	$\mathcal{L}(f * g)[s] = \mathcal{L}(f)[s]\mathcal{L}(g)[s]$
$\mathcal{L}(e^{ax})[s] = \frac{1}{s-a}, \ s > a$	$\mathcal{L}(\sin ax)[s] = \frac{a}{s^2+a^2}$
$\mathcal{L}(x^\lambda)[s] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}}$	$\mathcal{L}(\cos ax)[s] = \frac{s}{s^2+a^2}$
$\mathcal{L}(\delta_a)[s] = e^{-sa}$	$\mathcal{L}(H_a)[s] = e^{-sa}/s$