

MA2601-6 Guía de problemas de segundo orden.

Prof. Patricio Felmer
Prof. Aux.: Darío Valdebenito*

30 de abril de 2010

Problema 1

Calcule la solución general en $(\sqrt{2} - 1, +\infty)$ de la ecuación

$$(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0 \quad (1)$$

Solución

Encontremos una solución por inspección —no nula, para que sea linealmente independiente— de (1). Sea $y_1(x) = x + 1$ y probemos que satisface (1). En efecto, $y_1'(x) = 1, y_1''(x) = 0$; luego,

$$\begin{aligned} (1 - 2x - x^2)y_1''(x) + 2(1 + x)y_1'(x) - 2y_1(x) &= 0 + 2(1 + x) \cdot 1 - 2(1 + x) \\ &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La intuición para tomar $x + 1$ en vez de x viene de primero tomar x y ver que el resultado es constante e igual a 2.

Usaremos entonces la fórmula de reducción de orden, escribiendo (1) como

$$y'' + \frac{2(1+x)}{1-2x-x^2}y' - \frac{2}{1-2x-x^2}y = 0$$

i.e. $p(x) = \frac{-2(x+1)}{(x+1)^2-2}$. Escrito de esta manera, es fácil ver que

$$\int \frac{2(1+x)}{(x+1)^2-2} dx = \ln((x+1)^2-2)$$

Por lo tanto, la fórmula de reducción de orden nos da que

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)} dx}{y_1^2(x)} dx \\ &= (1+x) \int \frac{e^{\ln((x+1)^2-2)}}{(1+x)^2} dx \\ &= (1+x) \int \frac{(x+1)^2-2}{(1+x)^2} dx \\ &= (1+x)x + (1+x) \int \frac{-2dx}{(1+x)^2} \\ &= x(1+x) + \frac{1+x}{1+x} \cdot 2 \\ &= x(1+x) + 2 \end{aligned}$$

*Los enunciados originales de los problemas 1 al 3 son del curso dictado por M. del Pino en otoño 2006.

Verifiquemos que estas soluciones son linealmente independiente:

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= y_1 y_2' - y_1' y_2 \\ &= (1+x)(2x+1) - x(1+x) - 2 \\ &= (x+1)^2 - 2 \end{aligned}$$

de donde las soluciones son linealmente independiente si $x > \sqrt{2} - 1$, de modo que la solución general de (1) es

$$y(x) = C_1(1+x) + C_2(x^2 + x + 2)$$

Problema 2

Encuentre la solución general en $(0, \pi)$ de

$$4y'' + 36y = \frac{1}{\sin 3x} \quad (2)$$

Solución

La ecuación homogénea asociada a (2) es $y'' + 9y = 0$. Su polinomio característico es

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3i$$

Por lo tanto, la solución homogénea es $y_H(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$. No podemos usar constantes indeterminadas, puesto que $\frac{1}{\sin 3x}$ no puede escribirse en la forma $e^{\mu x}$ para $\mu \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, usaremos variación de parámetros. Dejamos propuesto al lector probar que si $y_1(x) = \cos 3x, y_2(x) = \sin 3x$, entonces

$$W(y_1, y_2) \equiv 3$$

Escribiendo $g(x) = \frac{1}{4 \sin 3x}$ (¡es muy importante que escribamos (2) con y'' sin coeficiente al lado!), calculemos la solución particular

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{g(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx + y_2(x) \int \frac{g(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$

La primera integral es

$$\int \frac{1}{\sin 3x} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4} \sin(3x) dx = \frac{1}{12} x$$

y la segunda es

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin 3x} \cdot \frac{\cos 3x}{3 \cdot 4} dx &= \frac{1}{12} \int \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \cdot \frac{3}{3} dx \\ &= \frac{1}{36} \ln |\sin 3x| \end{aligned}$$

Agrupando,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\frac{1}{12} x \cos 3x + \frac{1}{36} \sin 3x \ln |\sin 3x| \\ \Rightarrow y(x) &= y_H(x) + y_p(x) \\ &= C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{12} x \cos 3x + \frac{1}{36} \sin 3x \ln |\sin 3x| \end{aligned}$$

para $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Problema 3

Para $x > 0$, resuelva

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 50 \frac{\ln x}{x^3}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 5 \quad (3)$$

Solución

Resolvamos la ecuación homogénea

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$$

Supongamos una solución de la forma x^α (la ecuación característica a posteriori nos dice que este supuesto es correcto, en general hay que proceder con el cambio de variable $x = e^t$). Reemplazando,

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha - 1)x^\alpha + 2\alpha x^\alpha - 6x^\alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 6 &= 0 \end{aligned}$$

de donde $\alpha = -3 \vee \alpha = 2$, de modo que $y_1 = x^{-3}$ e $y_2 = x^2$ son soluciones de la ecuación homogénea. Su Wronskiano es

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= y_1 y_2' - y_2 y_1' \\ &= x^{-3} \cdot 2x - x^2 \cdot (-3x^{-4}) \\ &= 2x^{-2} + 3x^{-2} \\ &= 5x^{-2} \end{aligned}$$

por lo que las soluciones obtenidas —recordemos que $x > 0$ en esta ecuación— son linealmente independientes.

Usando la fórmula de variación de parámetros tendremos una solución particular de (3): primeramente notemos que si $k > 1$, entonces, por integración por partes,

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^k} dx &= \frac{1}{(1-k)x^{k-1}} \ln x - \frac{1}{1-k} \int \frac{dx}{x^k} \\ &= \frac{1}{(1-k)x^{k-1}} \ln x - \frac{1}{(1-k)^2 x^{k-1}} \end{aligned}$$

En la fórmula de variación de parámetros, usaremos $g(x) = \frac{50 \ln x}{x^5}$ (recordemos que debemos normalizar primero la ecuación),

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -y_1(x) \int \frac{g(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx + y_2(x) \int \frac{g(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx \\ &= -x^{-3} \int \frac{10x^2 \cdot x^2 \ln x}{x^5} dx + x^2 \int \frac{10 \ln x}{x^3 \cdot x^5 \cdot x^{-2}} dx \\ &= -x^{-3} \cdot 5 \ln^2 x + 10x^2 \left(\frac{-\ln x}{5x^5} - \frac{1}{25x^5} \right) \\ &= \frac{-5 \ln^2 x}{x^3} - \frac{2 \ln x}{x^3} - \frac{2}{5x^3} \end{aligned}$$

de modo tal que la solución es $y(x) = C_1 x^{-3} + C_2 x^2 - \frac{5 \ln^2 x}{x^3} - \frac{2 \ln x}{x^3} - \frac{2}{5x^3}$. Imponiendo $y(1) = 1, y'(1) = 5$, nos queda $C_1 = \frac{-3}{5}, C_2 = 2$, siguiendo que la solución es

$$y(x) = -x^{-3} + 2x^2 - \frac{5 \ln^2 x}{x^3} - \frac{2 \ln x}{x^3}$$

Problema 4

Usando coeficientes indeterminados, encuentre la solución general de

$$y'' - y' - 2y = (x^3 + x)e^{-2x} \quad (4)$$

Solución

El polinomio característico es $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, cuyas soluciones son $\lambda = -1 \vee \lambda = 2$. Como la exponencial tiene un coeficiente -2 , entonces

$$\begin{aligned} y_p &= (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3)e^{-2x} \\ y'_p &= (A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2)e^{-2x} - 2y_p \\ y''_p &= (2A_2 + 6A_3x)e^{-2x} - 2(y'_p + 2y_p) - 2y'_p \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y''_p - y'_p - 2y_p &= (2A_2 + 6A_3x)e^{-2x} - 4y'_p - 4y_p - y'_p - 2y_p \\ &= (2A_2 + 6A_3x)e^{-2x} - 5(A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2)e^{-2x} + 4(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3)e^{-2x} \end{aligned}$$

y al igualar con el lado derecho de (4) nos queda el sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 \\ 0 & -15 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $(A_0, A_1, A_2, A_3) = (\frac{295}{128}, \frac{71}{32}, \frac{15}{16}, \frac{1}{4})$, de modo tal que la solución general de (4) es

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + \left(\frac{295}{128} + \frac{71}{32}x + \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{4}x^3\right)e^{-2x}$$

Problema 5

Utilice el método de coeficientes indeterminados para encontrar la solución general de

$$y'' + y' = (x - 1)\sin x \quad (5)$$

Solución

El polinomio característico es $\lambda^2 + \lambda = 0$, de modo que $\lambda = 0 \vee \lambda = -1$. En este caso el coeficiente dentro de la exponencial es i , por lo que tomaremos

$$\begin{aligned} y_p &= (A_0 + A_1x)\sin x + (B_0 + B_1x)\cos x \\ y'_p &= A_1\sin x + (A_0 + A_1x)\cos x + B_1\cos x - (B_0 + B_1x)\sin x \\ &= (A_1 - B_0 - B_1x)\sin x + (A_0 + B_1 + A_1x)\cos x \\ y''_p &= -B_1\sin x + (A_1 - B_0 - B_1x)\cos x + B_1\cos x - (A_0 + A_1x + B_1)\sin x \\ &= (-2B_1 - A_0 - A_1x)\sin x + (A_1 + B_1 - B_0 - B_1x)\cos x \\ \Rightarrow y''_p + y'_p &= (A_1 - B_0 - 2B_1 - A_0 - A_1x - B_1x)\sin x + \\ &\quad + (A_1 + B_1 - B_0 + A_0 + B_1 + A_1 + A_1x - B_1x)\cos x \end{aligned}$$

Resolvamos primero para los coeficientes de x : como $-A_1 - B_1 = 1$, $A_1 - B_1 = 0$, nos queda $A_1 = \frac{-1}{2}$, $B_1 = \frac{-1}{2}$. Reemplazando, nos quedan las ecuaciones para los coeficientes que acompañan a $\sin x$ y $\cos x$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} - B_0 - A_0 &= -1 \\ -\frac{3}{2} - B_0 + A_0 &= 0\end{aligned}$$

de modo tal que $B_0 = 0$, $A_0 = \frac{3}{2}$, y la solución general de (5) es

$$y(x) = C_1 + C_2 e^x + \frac{3}{2} \sin x - \frac{1}{2} x \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$$

Cabe mencionar que cuando, en lugar de escribir e^{ix} , escribimos desarrollados senos y cosenos, los coeficientes del polinomio tienen que cambiar (esto es, no es correcto escribir $(A_0 + A_1 x)(\sin x + \cos x)$).

Agradecimientos

Agradecemos la colaboración de Laura Bono, Carlos Carrasco, Pablo Castelletto, Joaquín Jadué y Ximena Pizarro, alumnos del curso de EDO de otoño 2009 del prof. Kowalczyk, por haber señalado y corregido diversos (¡y muchos!) errores de versiones previas de esta guía.