MA2601-6 Enunciado Clase Auxiliar

Prof. Patricio Felmer
Prof. Aux.: Darío Valdebenito

16 de abril de 2010

Problema 1

Encuentre la solución del problema

$$y'' - 2y' + 3y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Problema 2

(a) Considere el problema

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

definido en $x \in (a,b)$, con p, q continuas en (a,b), y sea y_1 una solución de (1) tal que $y_1(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Demuestre que existe $y_2 = \omega(x)y_1$, con ω no constante, que resuelve (1).

(b) (C2, M. Kowalczyk, 2009) Use la parte anterior para determinar la solución general de

$$y'' - f(x)y' + (f(x) - 1)y = 0$$

donde f es continua.

Problema 3

Nuestro propósito es resolver el *problema de valores propios del laplaciano en 1 dimensión*. Más específicamente, queremos encontrar todos los pares (λ_k, ϕ_k) (con λ_k creciente) tales que

$$\begin{aligned} -\phi'' &= \lambda\phi \quad \text{en } [0,1] \\ \phi(0) &= \phi(1) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

y $\phi \neq 0$. Para ello, procederemos de la siguiente forma:

(a) Para $\lambda > 0$ resuelva la ecuación

$$u'' + \lambda u = 0,\ u(0) = 0 \tag{3}$$

(b) Pruebe que si $\psi(x), x \in (0,1)$ es solución de (3) para cierto λ y $k > 0$, entonces $\psi(kx)$ también lo es cambiando λ por $k^2\lambda$.

(c) Muestre que π^2 es el menor valor de λ para el que (2) tiene solución no trivial (luego, hablar de *valor propio* tiene sentido). Usando la parte anterior encuentre todos los demás valores.