MA2601-6 Un poco de variables separables

Prof. Patricio Felmer
Prof. Aux.: Darío Valdebenito

2 de abril de 2010

Convenciones

(a) En la función que es incógnita omitiremos la dependencia en t. En los coeficientes usualmente no, a menos que se indique lo contrario. Por ejemplo, si el problema fuera

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t), \quad t \in [0,1]$$

escribiremos

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f \quad \text{en } [0,1]$$

(b) Cuando escribamos una primitiva pondremos de inmediato la constante C, la cual eventualmente puede cambiar de una línea a otra. Por ejemplo, más abajo multiplicamos por 6 una ecuación, pero en lugar de escribir $6C$ ó $\bar{C}$ seguimos escribiendo C.

(c) Al escribir $\int a(x) + b(x)dx$, en rigor debiéramos escribir $\int [a(x) + b(x)]dx$, pero usualmente omitiremos el paréntesis interno y asumiremos que integramos todo lo que va entre el símbolo de integral y el dx.

Problema resuelto

Primeramente encontraremos todas las soluciones de

$$y' = \frac{x^2+1}{2-y} \tag{1}$$

Para ello, escribiremos y' como $\frac{dy}{dx}$ y procederemos formalmente. Nos queda

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2+1}{2-y} \\
(2-y)dy &= (x^2+1)dx \\
\int 2 - ydy &= \int x^2 + 1dx + C \\
2y - \frac{1}{2}y^2 &= \frac{1}{3}x^3 + x + C \\
3y^2 - 12y + 2x^3 + 6x + C &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática,

$$y = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 8x^3 - 24x - C}}{6}$$

apareciendo, por ende, dos soluciones:

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= 2 + \frac{1}{3}\sqrt{6 - 2x^3 - 6x - C} \\
y_2(x) &= 2 - \frac{1}{3}\sqrt{6 - 2x^3 - 6x - C}
\end{aligned}$$

soluciones que son válidas siempre y cuando $6 - 2x^3 - 6x - C \geq 0$. Además necesitamos que $y \neq 2$ para que la ecuación (1) tenga sentido; por lo tanto, no basta con imponer $\geq$, sino que hay que imponer la desigualdad estricta.

Para ilustrar esto, agregaremos la condición inicial $y(0) = 0$. La idea es evaluar en 0 las dos soluciones que nos dieron y ver qué sucede:

$$y_1(0) = 2 + \frac{1}{3}\sqrt{6 - C}$$
$$y_2(0) = 2 - \frac{1}{3}\sqrt{6 - C}$$

En el caso de y_1 no importa el valor de C que tomemos (nos interesan soluciones **reales** de la ecuación), no lograremos que $y_1(0) = 0$. Tomando $C = -30$ en y_2 cumplimos la condición inicial. Ergo, la solución del problema (1) con condición inicial $y(0) = 0$ es

$$y(x) = 2 - \frac{1}{3}\sqrt{36 - 2x^3 - 6x}$$

Nos queda ahora verificar dónde es válida esta solución de (1). Sea $\alpha > 0$ la única solución real de la ecuación $36 - 2x^3 - 6x = 0$. Entonces

$$\forall x \in (-\infty, \alpha) \quad y(x) < 2$$

y por ende la solución que encontramos tiene sentido (es real), es solución de la ecuación original, y el intervalo que hemos dado contiene a 0.

Recapitulando, lo que tenemos que hacer para resolver una ecuación de **variables separables** es

(a) Separar las variables; esto es, escribir algo del tipo $y' = f(y)g(x)$.

(b) Integrar la expresión $\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx$, no olvidando poner la constante.

(c) Imponer la condición inicial; digamos, $y(\tau) = k$.

(d) Determinar el intervalo maximal de existencia de la solución. Para ello, tenemos que verificar tres cosas: (i) que la función tenga sentido (esto es, que no haya cosas negativas bajo raíces, ceros en el denominador, etc.), (ii) que la función pueda ser ingresada en la ecuación original (en el ejemplo que dimos necesitábamos $y \neq 2$), y (iii) que τ esté dentro del intervalo que estamos poniendo. Esto último es relevante porque puede darse que una ecuación tenga sentido en varios intervalos disjuntos, pero como sólo uno de ellos contiene al punto donde imponemos la condición inicial, debemos escoger ese intervalo.

Problemas propuestos

A continuación dejamos dos problemas propuestos. No olviden que es importante escribir el intervalo de existencia de la solución. El segundo problema requerirá un cambio de variable.

$$yy' + (1 + y^2)\sin t = 0, \quad y(0) = 1$$
$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y(1) = 0$$