

**MA2601-5 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias****Profesor:** Michal Kowalczyk. **Auxiliar:** Felipe Maldonado.

## Auxiliar 12

8 de julio de 2010

**P1** Considere el siguiente sistema de EDO aislado.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 2x \\ \frac{dy}{dt} = \sin x - 2y \end{cases}$$

Demostrar que  $(0, 0)$  es un punto crítico aislado del sistema, y utilizando el método de linealización en torno a tal punto analizar estabilidad. Haga además el diagrama de fase correspondiente.

**P2** Considere las vibraciones de una masa sujeta a un resorte.

$$x'' + 2bx' + a^2x = 0$$

$a > 0$ ,  $b \geq 0$  ctes que representan el roce y la rigidez del resorte respectivamente.

- i) Reescriba la ecuación como un sistema. Demuestre que su único punto crítico es  $(0, 0)$  y que es aislado.
- ii) Hallar los valores propios del sistema.
- iii) En los 4 casos: 1)  $b = 0$ , 2)  $0 < b < a$ , 3)  $b = a$ , 4)  $b > a$ .  
Describa las naturaleza y propiedades de estabilidad del punto crítico  $(0, 0)$ .

**P3** Considere el siguiente sistema no lineal autónomo:

$$\begin{cases} x' = y - xy + \sigma x(1 - x) \\ y' = -y(1 - x) \end{cases}$$

Para  $\sigma \in \mathbb{R}$ .

- i) Calcule las nulclinas en  $x$  y en  $y$ , gráfíquelas en tres gráficos separados para  $\sigma = 0$ ,  $\sigma = 1$  y  $\sigma = -1$ .
- ii) Demuestre que los puntos críticos del sistema son siempre  $(0, 0)$ ;  $(1, 1)$  y si el  $\sigma \neq 0$ ,  $\sigma \neq -1$  el sistema tiene un punto crítico más que depende de  $\sigma$ .
- iii) Calcule el Jacobiano del sistema en cada uno de los puntos críticos y calcule los valores propios.
- iv) **Desde ahora en adelante, consideremos  $\sigma = \frac{-3}{2}$ .** Dibuje en un gráfico las nulclinas y los tres puntos críticos para este caso, indicando sus respectivos jacobianos.

- v) Estudie el punto crítico  $(0, 0)$ . Establezca su naturaleza y estabilidad. Calcule vectores propios solamente si es necesario. Haga un gráfico en la base propia (tomando como ejes los vectores propios).
- vi) Estudie el punto crítico  $(1, 1)$ . Establezca su naturaleza y estabilidad. Calcule vectores propios solamente si es necesario. Haga un gráfico en la base propia (tomando como ejes los vectores propios).
- vii) Estudie el punto crítico que depende de  $\sigma = \frac{-3}{2}$ . Establezca su naturaleza y estabilidad. Calcule vectores propios solamente si es necesario. Haga un gráfico en la base propia (tomando como ejes los vectores propios).
- viii) Haga un gráfico global del sistema. recuerde que las trayectorias deben respetar la regla de las nulclinas y ser acordes a su análisis previo en torno a cada punto crítico.