MA2601-5 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Michal Kowalczyk. **Auxiliar:** Felipe Maldonado.

Auxiliar 9

10 de junio de 2010

$\boxed{\text{P1}}$ Sea $x \in \mathbb{R}$, y $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, demuestre que se tiene:

$$e^{Ax} = e^{ax} \begin{bmatrix} \cos bx & \sin bx \\ -\sin bx & \cos bx \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{P2}}$ Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ a coeficientes constantes. Se define $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$. Suponga que para ciertos números $\lambda \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}$ se tiene que $(A - \lambda I)^m = 0$, es decir, la matriz $(A - \lambda I)$ es nilpotente.

i) Demuestre que
$$e^{At} = e^{\lambda t}\big[I + t(A - \lambda I) + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A - \lambda I)^{m-1}\big]$$

ii) Calcule la matriz exponencial de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{P3}}$ Sea A una matriz simétrica de $n \times n$ a coeficientes constantes y supongamos que $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable.

i) Demostrar que $\frac{d}{ds}\big(\big[Ay(s)\big]^T y(s)\big) = 2\big[Ay(s)\big]^T y'(s)$.

ii) Si y satisface la ecuación diferencial $y'' + Ay = 0$, demuestre que existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que:
$$\| y'(s) \|^2 + \big[Ay(s)\big]^T y(s) = C.$$

$\boxed{\text{P4}}$ i) Sean $X_1(t), X_2(t)$ dos soluciones del sistema $X'(t) = A(t)X(t)$ en $\mathbb{R}^N$, donde la función matricial $t \longmapsto A(t)$ es continua. Pruebe que si $X_1(0)$ *y* $X_2(0)$ son paralelos, entonces $X_1(t)$ *y* $X_2(t)$ son paralelos $\forall t$.

ii) Sean $X_1(t), X_2(t)$ dos soluciones del sistema $X'(t) = AX(t)$ en $\mathbb{R}^N$,con A una matriz antisimétrica ($A^T = -A$) a coeficientes constantes. Pruebe que si $X_1(t_0)$ *y* $X_2(t_0)$ son perpendiculares, entonces $X_1(t)$ *y* $X_2(t)$ son perpendiculares $\forall t$.

$\boxed{\text{P5}}$ Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental de $X'(t) = A(t)X(t)$, y sea $W(t) = det\ \Phi(t) = det\big[\phi^1(t), \cdots, \phi^n(t)\big]$. Demuestre que:
$$W(t) = W(\tau)e^{\int_\tau^t tr[A(s)]ds}, \quad \forall \tau < t \in \mathbb{R}.$$