MA2601-5 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Michal Kowalczyk. **Auxiliar:** Felipe Maldonado.

Auxiliar 8

10 de junio de 2010

P1 Sea la Ecuación de Bessel de parámetro (u orden) n.

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad n \geq 0 \tag{1}$$

Las soluciones de parámetro i de esta ecuación se denotan comunmente $J_i(x)$.
Se tiene que $J_0(x)$ satisface $\mathcal{L}\{J_0(x)\}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, $J_0(0) = 1$. Y además se cumple que $-J_1 = J_0'$.

a) Usando lo anterior calcular explícitamente f, que satisfaga la ecuación integral:

$$f(x) = \int_0^x J_0(y)J_1(x-y)dy.$$

b) Calcular $\mathcal{L}\{\frac{J_1(x)}{x}\}(s)$, y deducir el valor de $\int_0^\infty \frac{J_1(x)}{x}dx$.

P2 Sea $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Denotamos $L_n = \mathcal{L}\{\sin^n(at)\}(s)$. El objetivo de este problema es calcular L_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Calcular L_1 y L_2.

b) Pruebe que $L_n = L_{n-2} - \mathcal{L}\{\sin^{n-2}(at)\cos^2(at)\}(s)$, $\forall n \geq 3$.

c) Comprobar que se tiene:

$$\mathcal{L}\{\sin^{n-2}(at)\cos^2(at)\}(s) = \left(\frac{s^2}{a^2n(n-1)} + \frac{1}{n-1}\right)L_n, \quad \forall n \geq 3$$

Hint: Integrar por partes astutamente.

d) Deduzca que $L_n = \frac{a^2n(n-1)}{s^2+a^2n^2}L_{n-2}$, $\forall n \geq 3$, y escriba una fórmula cerrada para L_n.

e) Encuentre una fórmula de convolución para $\sin^n(at)$ en función de $\sin^{n-2}(at)$.

P3 Sea $f : [0,\infty] \to \mathbb{R}$ una función continua, tal que:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = k$$

a) Demostrar que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ existe $\forall s > 0$.

b) Demostrar que $\lim_{s\to 0^+} sF(s)$ existe y vale k.

$\boxed{\text{P4}}$ Dada una función $y \in \mathcal{C}([0,1])$, definimos su **Transformada de Mellin**, en $s > 0$ como sigue:

$$\mathcal{M}\{y\}(s) = \int_0^1 x^{s-1} y(x) dx$$

cuando esta integral exista.

a) Demuestre que $\mathcal{M}\{1\}(s) = \dfrac{1}{s}$ y que $\mathcal{M}\{x^\alpha y\}(s) = \mathcal{M}\{y\}(s+\alpha)$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Suponiendo que para cada $s > 0$ la función y satisface: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^s y(x) = 0$.
Demostrar que $\mathcal{M}\{xy'(x)\}(s) = -s\mathcal{M}\{y\} + y(1)$.

c) Probar que $\mathcal{M}\{\displaystyle\int_x^1 \frac{y(u)}{u} du\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{M}\{y(x)\}(s)$.

d) Resuelva la siguiente EDO usando transformada de Mellin y las propiedades demostradas en los puntos anteriores:

$$x(xy')' + 2xy' = 1, \quad y(1) = y'(1) = 0.$$

Hint: Se puede asumir que si $\mathcal{M}\{f\}(s) = \mathcal{M}\{g\}(s)$, con $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$ entonces $f = g$.