MA2601-5 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Profesor: Michal Kowalczyk. **Auxiliar:** Felipe Maldonado.

Auxiliar 7

26 de mayo de 2010

P1 Ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0, \quad n \geq 0 \tag{1}$$

- a) Verificar que $x_0 = 1$ es un punto singular regular de la ecuación (1) y utilizar el método de Frobenius para encontrar una solución en torno a ese punto.
- b) Demostrar que si n es un entero positivo, entonces (1) posee una solución polinomial $P_n(x)$ de grado n , con $P_n(1) = 1$. Esta solución se conoce como Polinomio de Legendre de orden n .
- c) **(Propuesto)**
Calcular $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, y demostrar que los Polinomios de Legendre son ortogonales en $[-1, 1]$, esto es:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0, \quad n \neq m$$

Hint: Como P_n satisface (1), entonces $[(1 - x^2)P_n']' = -n(n + 1)P_n$, lo mismo se cumple para P_m , restar ambas igualdades y se obtendrá algo del estilo:

$$[(1 - x^2)(P_mP_n' - P_m'P_n)]' = [m(m + 1) - n(n + 1)]P_nP_m.$$

Integrar por partes esto último y concluir.

Recuerdo

- $H_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < a \\ 1 & \text{para } t \geq a \end{cases}$
- $\mathcal{L}(\sin wt)(s) = \frac{w}{s^2 + w^2}, \quad s > 0$
- $\mathcal{L}(H_a(t))(s) = \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0$
- $\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n \mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1}f(0^+) - \dots - f^{n-1}(0^+)$
- Si $f, g \in C_\alpha$ $\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s)$

P2 Sea $f(t) : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ una función periódica, con período $T > 0$. Demuestre que:

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{\int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau}{1 - e^{-sT}} \tag{2}$$

P3 **Función Gamma**

La función $\Gamma(x)$ (gamma) se define como:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

- a) Demuestre que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\forall x > 0$.
- b) Pruebe que $\Gamma(n+1) = n!$. Por esta propiedad se dice que $\Gamma(x)$ es la generalización de la función factorial a $\mathbb{R}_+$.
- c) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$. Demuestre que:

$$\mathcal{L}(t^\alpha)(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}. \quad (3)$$

Hint: Haga el cambio de variables $t = us$ en la integral que define a Γ .

P4 Usando Transformada de Laplace (y antitransformada), encontrar una expresión para $f(t)$, a partir de la siguiente ecuación integral-diferencial.

$$\int_0^t f(x) \sin(t-x) dx = \frac{-1}{2} t f'(t), \quad f(0) = 1. \quad (4)$$

P5 Resolver la siguiente ecuación usando transformada de Laplace.

$$y'' = -\frac{k}{m}y + \frac{f(t)}{m}, \quad y(0) = y'(0) = 0. \quad (5)$$

Donde $f(t)$ está definida como sigue:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq a \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{para } a < t \leq a + \epsilon \\ 0 & \text{para } a + \epsilon < t. \end{cases}$$