

MA2601-5- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.**Profesor:** Michal Kowalczyk **Auxiliar:** Felipe Maldonado C.

Auxiliar 5

14 de mayo de 2010

P1. Considere la ecuación:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad -1 < x < 1. \quad (1)$$

Sabiendo que $\phi_1(x) = x$ es solución de (1), utilice la formula de Abel para encontrar una segunda solución $\phi_2(x)$ tal que $W(\phi_1, \phi_2)(0) = -1$.

Hint: La fórmula de Abel determina, en general, una ecuación de primer orden para ϕ_2 :

$$\phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_1'(x)\phi_2(x) = W(\phi_1, \phi_2)(x_0) \exp \left\{ - \int_{x_0}^x p(t) dt \right\}. \quad (2)$$

Resuelva esta ecuación y encuentre ϕ_2 .

P2. Considere la ecuación

$$y'' + y \cos x = 0. \quad (3)$$

(a) Si $\phi(x)$ es una solución de la ecuación, demuestre que $\psi(x) = \phi(x + 2\pi)$ también es una solución.

(b) Demuestre que la función $\phi(x)$ es una solución periódica de la ecuación de periodo 2π si y solamente si:

$$\phi(0) = \phi(2\pi), \quad \phi'(0) = \phi'(2\pi). \quad (4)$$

(c) Sean ϕ_1, ϕ_2 dos soluciones tales que:

$$\phi_1(0) = 1, \phi_1'(0) = 0, \quad \phi_2(0) = 0, \phi_2'(0) = 1. \quad (5)$$

Determine las constantes a, b, c, d tales que:

$$\phi_1(x + 2\pi) = a\phi_1(x) + b\phi_2(x),$$

$$\phi_2(x + 2\pi) = c\phi_1(x) + d\phi_2(x).$$

P3. En este problema vamos a denotar las derivadas $\frac{d}{dx} = D$, $\frac{d^k}{dx^k} = D^k$. Recordaremos la fórmula de Leibniz: si f, g son funciones k veces diferenciables, entonces

$$D^k(fg) = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} D^\ell(f) D^{k-\ell}(g), \quad \text{donde} \quad \binom{k}{\ell} = \frac{k!}{(k-\ell)!\ell!}.$$

(a) Demuestre que si g es k veces diferenciable y r es una constante, entonces:

$$D^k(e^{rx}g) = e^{rx}(D+r)^k(g).$$

- (b) Sea L un operador lineal de orden k con coeficientes constantes tal que su polinomio característico tiene forma $p(\lambda) = (\lambda - a)^k$, esto es $L = (D - a)^k$, donde a es una constante. Utilice la parte anterior para demostrar que cada solución ϕ de la ecuación $L(y) = 0$ es de la forma:

$$\phi(x) = e^{ax} P(x).$$

Donde P es un polinomio de grado $m \leq k - 1$.

Hint: Utilizando 3 (a) demuestre $(D - a)^k(\phi) = e^{ax} D^k(e^{-ax}\phi)$.

P4. Ecuación de Chebyshev

Considere la ecuación:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + p^2y = 0, \quad p \in \mathbb{R} \quad (6)$$

- (a) Encontrar dos soluciones l.i. como series de potencias, válidas para $|x| < 1$, en torno de un punto x_0 , que por comodidad lo puede tomar igual a 0.
- (b) Si p es un entero positivo, demostrar que existe un polinomio de grado p que es solución de la ecuación.