Guía 3
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Facultad de Ingeniería y Ciencias Aplicadas, U. de Los Andes.
Semestre 2009-2.

P1.- Complementos de Cálculo Diferencial e Integral.

Sean $f\ :\ ]a_1,b_1[\times]a_2,b_2[\to I\!R$ una función de clase $\mathcal{C}^1\Big(\,]a_1,b_1[\times]a_2,b_2[\,\Big)$ y $a,b\in]a_1,b_1[$, con $a<b$ y $a_1,a_2,b_1,b_2\in I\!R$, $a_1<b_1, a_2<b_2$.

(a) Demuestre que la función $F:]a_2,b_2[\to I\!R$ dada por

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx\ ,$$

está bien definida.

(b) Sea $y_0\in]a_2,b_2[$. Demuestre que $\lim\limits_{y\to y_0}F(y)=F(y_0)$. Es decir, el límite conmuta con la integral

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b\left[\lim_{y\to y_0}f(x,y)\right]\,dx\ .$$

Concluya que F es continua en $]a_2,b_2[$.

Ind: Proceda por definición. Tenga presente que una función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua.

(c) Demuestre que para cualquier $y\in]a_2,b_2[$ se tiene la igualdad

$$\frac{dF}{dy}(y)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\ .$$

Es decir, la derivada conmuta con la integral.

Ind: Primero, use las partes anteriores y las hipótesis para demostrar que la expresión del lado derecho (integral de la derivada parcial), está bien definida.

Proceda por definición de derivada y use adecuadamente el Teorema del Valor Medio y la continuidad de la derivada parcial.

(d) Suponga ahora que $f\ :\ ]a_1,+\infty[\times]a_2,b_2[\to I\!R$ es una función de clase $\mathcal{C}^1\Big(\,]a_1,+\infty[\times]a_2,b_2[\,\Big)$, para la cual existen funciones

$$G:]a_1,+\infty[\times]a_2,b_2[\to I\!R\ ,\ H:]a_1,+\infty[\times]a_2,b_2[\to I\!R\ ,$$

tales que :

- para cada $y\in]a_2,b_2[$, existe $\delta_1>0$, independiente de x (puede depender de y) tal que

$$|f(x,y+h)|\le G(x,y)\ ,\forall\,x\in]a_1,+\infty[\ ,\ |h|<\delta_1\ ,\ y+h\in]a_2,b_2[\ ,$$

- para cada $y\ \in]a_2, b_2[$, existe $\delta_2 > 0$, independiente de x (puede depender de y) tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h)\right| \leq H(x,y) \ , \ \forall\, x\ \in]a_1, +\infty[\ , \ |h| < \delta_2 \ , \ y+h\ \in]a_2, b_2[\ ,$$

- las integrales impropias $\displaystyle\int_a^{+\infty} G(x,y)\,dx$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} H(x,y)\,dx$ existen para cualquier $y \in\ ]a_2, b_2[$, $a \in]a_1, +\infty[$

(d1) Demuestre que la función $\tilde{F} :]a_2, b_2[\to I\!R$ dada por

$$\tilde{F}(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \ ,$$

está bien definida.

(d2) Sea $y_0\ \in\ ]a_2, b_2[$. Demuestre que $\lim\limits_{y \to y_0} \tilde{F}(y) = \tilde{F}(y_0)$. Es decir, el límite conmuta con la integral

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} \left[\lim_{y \to y_0} f(x,y)\right] dx \ .$$

Concluya que $\tilde{F}$ es continua en $]a_2, b_2[$.

(d3) Demuestre que para cualquier $y\ \in]a_2, b_2[$ se tiene la igualdad

$$\frac{d\tilde{F}}{dy}(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx \ .$$

Ind: Igual que antes, primero use las partes anteriores y las hipótesis para demostrar que la expresión del lado derecho (integral de la derivada parcial), está bien definida.
Demuestre que dado ε positivo, existe $r \in I\!R$, con $a < r$, tal que la integral entre $[r, +\infty[$ es menor a ε. En $[a, r]$ use la continuidad uniforme.
El Teorema del Valor Medio puede ser útil.

(d4) Siguiendo las ideas anteriores, determine la validez de los resultados anteriores para los límites laterales en a_2 y b_2.
Observación : En general, las hipótesis para el intercambio del límite con la integral pueden ser relativamente restrictivas. De hecho puede ser más conveniente estudiar directamente por definición si tal hecho es válido.

(e) Considere la función $F : I\!R \setminus \{0\} \to I\!R$ dada por la fórmula

$$F(y) = \int_0^1 e^{yx}\,dx \ .$$

(e1) Encuentre por integración directa una expresión para F.

(e2) Si $n \in \mathbb{N}$, demuestre que

$$\int_0^1 x^n e^{yx}\,dx = F^{(n)}(y) = \frac{(-1)^n n!}{y^{n+1}}(e^y-1)+e^y\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{y^{n-k+1}}\ ,$$

para cualquier $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Ind. : Use el Problema 1 parte (c).

(f) En general, la conmutatividad entre los límites y las derivadas o integrales o combinaciones entre ellos se pierde sin la continuidad o bien si se trata de integrales impropias. Veamos el siguiente ejemplo:

(f1) Demuestre que la integral impropia $\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\,du$ converge y su valor es un número positivo.

(f2) Sea $y \in\ ]0,+\infty[$. Demuestre que

$$\int_{0^+}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(yx)}{x}\,dx = \int_{0^+}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\,du\ .$$

(f3) Use la parte anterior para demostrar que

$$\lim_{y\to 0^+}\int_{0^+}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(yx)}{x}\,dx \neq \int_{0^+}^{+\infty}\lim_{y\to 0^+}\left[\frac{\operatorname{sen}(yx)}{x}\right]dx\ .$$

(g) Considere la función $F :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dada por la fórmula

$$F(y) = \int_{0^+}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(xy)}{x(x^2+1)}\,dx\ .$$

(g1) Demuestre que F está bien definida y es acotada.

(g2) Demuestre que F satisface la EDO Lineal

$$F''(y) - F(y) + \int_{0^+}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\,du = 0\ ,\ \ y>0\ .$$

(g3) Use las partes anteriores para demostrar que

$$\lim_{y\to 0^+}F(y) = 0\ ,\ \ \lim_{y\to 0^+}F'(y) = \frac{\pi}{2}\ .$$

(g4) Use las partes anteriores para concluir que

$$F(y) = \frac{\pi}{2}\left(1-e^{-y}\right)\ ,\ y>0\ .$$

(h) Sean $f_1\ :]c,d[\to]a_2,b_2[$, $f_2\ :]c,d[\to]a_2,b_2[$ funciones de clase $\mathcal{C}^1(]c,d[)$. Considere la función $T :]c,d[\to \mathbb{R}$ dada por la fórmula

$$T(y) = \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)\,dx\ .$$

Demuestre que T está bien definida. Más aún, demuestre que T es $\mathcal{C}^1(]c,d[)$ y

$$\frac{dT}{dy}(y) = f(f_2(y),y)\cdot f_2'(y) - f(f_1(y),y)\cdot f_1'(y) + \int_{f_1(y)}^{f_2(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\ .$$

P2.- FORMA NORMAL DE UNA EDO LINEAL HOMOGÉNEA DE SEGUNDO ORDEN.

Sea I un intervalo abierto y sean $P, Q : I \to I\!R$ funciones continuas. Considere la EDO lineal de segundo orden

$$(*) \quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \ , \ x \in I \ .$$

Para $a \in I$ fijo, sea $z : I \to I\!R$ la función dada por $z(x) = e^{-\frac{1}{2}\int_a^x P(s)\,ds}$. Demuestre que y es solución de $(*)$ si y sólo si la función $u : I \to I\!R$ dada por $u(x) = \frac{y(x)}{z(x)}$ satisface

$$(**) \quad u'' + q(x)u = 0 \ , \ x \in I,$$

donde $q : I \to I\!R$ es la función dada por $q(x) = Q(x) - \frac{1}{4}P(x)^2 - \frac{1}{2}P'(x)$.

La EDO $(**)$ se denomina **forma normal** de la EDO $(*)$.

P3.- CEROS DE UNA EDO LINEAL HOMOGÉNEA DE SEGUNDO ORDEN.

Sean I un intervalo abierto y $\alpha : I \to I\!R$ una función continua. Considere la edo

$$(\star) \quad w'' + \alpha(x)w = 0 \ , \ x \in I \ .$$

(a) Sean a, b números reales, $a < b$, tales que $[a, b] \subset I$. Si w es una solución no-trivial de $(\star)$, demuestre que w tiene a lo más un número finito de ceros en $[a, b]$.

(b) Si $\alpha(x) < 0$ para todo $x \in I$ y w es una solución no-trivial de $(\star)$, demuestre que w tiene a lo más un cero en I.

(c) Considere el caso $I =]0, +\infty[$ y suponga que $\alpha(x) > 0$, para cualquier $x \in I$. Sea a un número real positivo tal que

$$\int_a^{+\infty} q(x)\,dx$$

diverge. Demuestre que toda solución no-trivial de $(\star)$ tiene infinitos ceros en I.

(d) Considere las siguientes ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} (1)\ & u'' + \alpha(x)u = 0 \\ (2)\ & v'' + \beta(x)v = 0 \ , \end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta : I \to I\!R$, I un intervalo abierto, son funciones tales que $\beta(x) < \alpha(x)$, para cualquier $x \in I$.

Si u y v son soluciones no-triviales de (1) y (2), respectivamente, y r_1 y r_2 son dos ceros consecutivos de v, demuestre que u se anula al menos una vez en $]r_1, r_2[$.

P4.- Considere un número natural $n \in I\!N$ y sean $f_{ij} :]a,b[\to I\!R$ funciones derivables, $i,j \in \{1,2,...,n\}$. Para cada $j \in \{1,2,...n\}$, sea $c_j :]a,b[\to I\!R^n$ la función vectorial

$$c_j(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(x) e_i \ ,$$

donde $\{e_i\}_{i=1}^n$ denota la base canónica ordenada de $I\!R^n$.

Sea $A(x)$ la matriz cuyas columnas son los vectores $c_j(x)$, esto es,

$$A(x) = [c_1(x)\, c_2(x) \, \cdots \, c_n(x)] \ .$$

Demuestre que la función $\mathcal{D} :]a,b[\to I\!R$ dada por la fórmula

$$\mathcal{D}(x) = det(A(x))$$

es derivable en $]a,b[$ y

$$\mathcal{D}'(x) = \sum_{j=1}^{n} det\left([c_1(x)\, c_2(x) \, \cdots c_j'(x) \, \cdots \, c_n(x)]\right) \ .$$

P5.- Sean $n \in I\!N$ y $a_j :]a,b[\to I\!R$, $j = 0,1,...,n-1$, funciones continuas. Considere la EDO lineal homogénea de orden n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \ , \ x \in]a,b[\ .$$

Considere un sistema fundamental de soluciones $\{\phi_j\}_{j=1}^n$ y sea W el wronskiano asociado. Si $x_0 \in]a,b[$, demuestre que

$$W'(x) = -a_{n-1}(x) W(x) \ , \ x \in]a,b[$$

y concluya que $W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(s)\,ds}$.

Ind. : Use adecuadamente el problema 4. Observe que el problema 4 también es válido por filas.

P6.- Sean $n \in I\!N$, $2 \le n$ y $a_j :]a,b[\to I\!R$, $j = 0,1,...,n-1$, $g :]a,b[\to I\!R$ funciones continuas. Considere la EDO lineal de orden n

$$(*) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x) \ , \ x \in]a,b[\ .$$

Considere un sistema fundamental de soluciones $\{\phi_j\}_{j=1}^n$ y sea W el wronskiano asociado. Denote por W_j, $j = 1,2,...,n$ el determinante que se obtiene a partir de W reemplazando la j-ésima columna por el j-ésimo vector de la base canónica ordenada.

(a) Sea $L :]a,b[\times]a,b[\to I\!R$ la función definida por

$$L(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\phi_j(x) W_j(y)}{W(y)} \ .$$

Demuestre que $L(x,y) = \frac{K(x,y)}{W(y)}$, donde

$$K(x,y) = \begin{vmatrix} \phi_1(y) & \phi_2(y) & \cdots & \phi_n(y) \\ \phi_1'(y) & \phi_2'(y) & \cdots & \phi_n'(y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-2)}(y) & \phi_2^{(n-2)}(y) & \cdots & \phi_n^{(n-2)}(y) \\ \phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x) \end{vmatrix} .$$

(b) Con la notación de (a), considere la función $\psi :]a,b[\to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} L(x,y) \cdot g(y)\, dy$$

donde $x_0 \in]a,b[$ es un número fijo.
Demuestre que ψ es una solución de la EDO $(*)$ y satisface

$$\psi^{(m)}(x_0) = 0 \ , \ m = 0,1,2,...,n-2 \ , \ \psi^{(n-1)}(x_0) = g(x_0) \ .$$

Ind.: Use el problema 1.

P7.- Encuentre la solución general de las siguientes EDO lineales, indicando claramente dominio de definición:

- $y^{(5)} - 4y = e^{(1+i)x} \ , \ x \in \mathbb{R},$
- $x^2y'' + ixy' + -\frac{i}{2}y = -3i \ , \ x > 0,$
- $y^{(6)} - y^{(5)} - y^{(4)} - y^{(3)} - 4y'' + 2y' + 4 = x^5e^{-x} + e^{\sqrt{2}\cdot xi} \ , \ x \in \mathbb{R}$

Para las EDO anteriores, formule un problema de valores iniciales (valores explícitos elegidos por ud.) adecuado (de acuerdo a los dominios de definición) y encuentre explícitamente la solución.

P8.- Considere la ecuación diferencial:

$$y'' + xy' + y = 0 \quad . \tag{1}$$

(a) Encuentre las soluciones l.i. de (1) en serie de potencias .

(b) Verifique que una solución es el desarrollo de $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

P9.- Considere la *ecuación de Airy*:

$$y'' + xy = 0,$$

cuyas soluciones se conocen como *funciones de Airy*. Encontrar la solución general como serie de potencias .

P10.- Considere la *ecuación de Chebyshev*:

$$(1-x^2)y'' - xy' + p^2y = 0 \quad p \in \mathbb{R}.$$

(a) Encontrar dos soluciones l.i. como series de potencia, válidas para $|x| < 1$.

(b) Si p es un entero positivo, demostrar que existe un polinomio de grado p que es solución de la ecuación.

P11.- La ecuación diferencial:

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0 \quad \alpha \in I\!R \tag{2}$$

se llama *ecuación de Hermite* .

(a) Encuentre dos soluciones l.i. en $I\!R$.

(b) Para el caso $\alpha = n$ un entero no negativo, demuestre que existe un polinomio de grado n que es solución .

(c) Considere la *Fórmula de Rodrígues*:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \qquad \forall\, n \geq 1.$$

(c.1) Demostrar las fórmulas de recurrencias:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0. \tag{3}$$
$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x). \tag{4}$$

Ind: Si $u(x) = e^{-x^2}$ demostrar que $u' + 2xu = 0$, luego usar Leibnitz para derivar n veces esta ecuación y obtener (3). Para la relación (4) derivar directamente la definición de H_n.

(c.2) Usar apropiadamente las relaciones de la parte anterior, para demostrar que $H_n(x)$ es solución de (2) cuando $\alpha = n$, un entero positivo.

P12.- Encuentre la solución en series de potencias de :

$$(a)\ y'' - xy' + y = 0 \qquad (b)\ y'' - x^2 y = 0$$

$$(c)\ y'' - \frac{1}{1+x^2} y = 0 \qquad (d)\ (x^2+4)y'' - xy' + y = 0$$

P13.- Resolver la ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$y'' + e^x y = 0.$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Ind: Escribir el desarrollo en serie de $e^x = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ y además tenga en cuenta que el producto de dos series convergentes para $|x| < r$ está dado por:

$$\sum_{n\geq 0} c_n x^n = \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right)}_{=c_n} x^n \quad |x| < r.$$

P14.- Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$(x^2 - 2x)y'' + 5(x-1) + 3y = 0.$$
$$y(1) = 7,\ y'(1) = 3.$$

Ind: Determinar la solución como una serie de potencias en torno a $x_0 = 1$, para ello notar que en cada $x \in I\!R$ se tiene la igualdad $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$.

P15.- Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$x(2-x)y'' - 6(x-1)y' - 4y = 0.$$
$$y(1) = 1,\ y'(1) = 0.$$

P16.- Considere la *ecuación de Legendre*:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \qquad n \geq 0. \tag{5}$$

(a) Verificar que $x_0 = 1$ es un punto singular regular para (5). Use el método de Frobenius para encontrar una solución en serie de potencias en torno a $x_0 = 1$.

(b) Demostrar que si n es un entero positivo, entonces (5) posee una solución polinomial $P_n(x)$ de grado n, con $P_n(1) = 1$. Esta solución se llama *Polinomio de Legendre de orden n.*

(c) Calcular explícitamente $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$. Demostrar además que los polinomios de Legendre son ortogonales en $[-1,1]$, esto quiere decir:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0, \qquad \text{si} \quad n \neq m.$$

Ind: Como P_n satisface (5), entonces $[(1-x^2)P_n']' = -n(n+1)P_n$, haciendo lo mismo para P_m y restando se tiene que:

$$[\,(1-x^2)(P_mP_n' - P_m'P_n)\,]' = [m(m+1) - n(n+1)]P_nP_m,$$

luego integrar en $[-1,1]$ y finalmente hacer integración por partes.

P17.- Use el método de Frobenius, si es que es posible, para encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a)\ x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0\ ,\ x > 0.$$

$$(b)\ x^2y'' - 2x^2y\ + (4x-2)y = 0\ ,\ x > 0$$

P18.- Considere el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$y'' + (e^x - 2)y' - 2e^xy = 0.$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

(a) Justificar que el problema admite una solución en serie de potencias $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_nx^n$ convergente en $I\!R$.

(b) Demostrar, al reemplazar $y(x)$ en la ecuación, que los coeficientes a_n satisfacen la siguiente recurrencia:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}[\,(k+1)a_{k+1} - 2a_k\,] = 0 \quad \forall\, n \geq 0.$$

Ind: Recordar el desarrollo en serie de e^x y multiplicación de series convergentes.

(c) Calcular los términos a_0, a_1, a_2, a_3.

(d) Luego use la parte anterior para conjeturar que que $a_n = \frac{2^n}{n!}$. Usar la parte (b) para demostrar por inducción segunda forma lo anterior.

(e) Concluya que $y(x) = e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

P19.- En el siguiente ejercicio, demostraremos algunas propiedades de las funciones de Bessel.

(a) Sea

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \ , \ m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ , \ x \geq 0 \ .$$

(a1) Encuentre el radio de convergencia de la serie.

(a2) Demuestre que J_m satisface

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0 \quad , x > 0$$

y concluya que $v(x) = J_m(\lambda x)$, $\lambda > 0$ satisface

$$v'' + \frac{1}{x}v' + \left(\lambda^2 - \frac{m^2}{x^2}\right) v = 0 \quad , x > 0 \quad .$$

(a3) Use la definición de J_m para demostrar

(1) $J'_{m+1}(x) + \frac{m+1}{x} J_{m+1}(x) = J_m(x) \ , \ x > 0$

(2) $J'_m(x) - \frac{m}{x} J_m(x) = J_{m+1}(x) \ , \ x > 0$.

(b) En lo que sigue, nos enfocaremos a estudiar los ceros de $J_0(x)$.

(b1) Sea $\omega(x) = \sqrt{x} J_0(x)$. Demuestre que ω satisface

$$(*) \quad \omega'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) \omega = 0 \ , \ x > 0 \ .$$

(b2) Demuestre que ω tiene finitos ceros en cada intervalo compacto contenido en el eje positivo.
Ind.: Use el problema 3.

(b4) Para cada $n \in \mathbb{N}$, demuestre que existe un cero de J_0 en el intervalo $[n\pi, (n+1)\pi]$.
Ind.: Use el problema 3.

(b4) Use las partes anteriores y concluya que el conjunto de ceros de J_0 es numerable.

(b5) Si λ es un cero de J_0, demuestre que $J'_1(\lambda) \neq 0$.

(c) Sea F definida por

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} cos(x sen(y))\, dy \quad .$$

(c1) Demuestre que F satisface

$$xF'' + F' + xF = 0 \ , \ x > 0 \ ,$$

y $\lim_{x \to 0^+} F(x) = 1 \ , \ \lim_{x \to 0^+} F'(x) = 1$

(c2) Use la parte anterior y concluya que $F(x) = J_0(x)\,,\, x > 0$.
Esta es la *fórmula integral de Bessel* .

(c3) Use la parte (c2) y el teorema de Rolle para concluir que el primer cero de la función J_0 esta entre 2 y 3.

P20.- Considere la *ecuación de Bessel* de orden p:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0. \tag{6}$$

(a) Sea $x > 0$. Demostrar que la sustitución $y = \frac{u}{\sqrt{x}}$ transforma (6) en la siguiente ecuación de segundo orden:

$$u'' + \left[1 + \left(\frac{1}{4} - p^2\right)\frac{1}{x^2}\right]u = 0.$$

(b) Usar la parte anterior, para demostrar que la solución general de la ecuación de Bessel en el caso $p = \frac{1}{2}$ está dada por:

$$y(x) = A\,\frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}} + B\,\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \qquad x > 0.$$

Donde A, B sons constantes reales.

(c) Usar el método de Frobenius para comprobar el resultado de la parte anterior. Para ello demostrar que $x_0 = 0$ es un punto singular regular de (6), luego demostrar que las raíces del polinomio indicial en el caso $p = \frac{1}{2}$ son $r = \pm\frac{1}{2}$. Finalmente encontrar las soluciones l.i del tipo $x^r \sum\limits_{k\geq 0} a_k x^k$.

P21.- Sean α, β y γ constantes reales. Considere la ecuación *hipergeométrica de Gauss*:

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \tag{7}$$

(a) Demostrar que $x_0 = 0$ es un punto singular regular de (7) y que las raíces de la ecuación indicial asociada son $r_1 = 0$ y $r_2 = 1 - \gamma$.

(b) Sea γ un real positivo. Usar el método de Frobenius para demostrar que una solución en serie del tipo $y(x) = x^{r_1} \sum\limits_{k\geq 0} a_k x^k$, con $a_0 \neq 0$ satisface la relación de recurrencia:

$$a_{k+1} = \frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(\gamma+k)(1+k)}a_k \qquad \forall k \geq 0.$$

(c) Si $a_0 = 1$ demostrar que $y(x)$, está dada por:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{\alpha_k \beta_k}{k!\gamma_k} x^k$$

Donde $\alpha_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\ \forall\, k \geq 1$, similarmente se definen β_k y γ_k. La función $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ se denomina *serie hipergeométrica.*

(d) Usar la parte anterior para demostrar que:

(d.1) $F(1,1,1,x) = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1.$ *Serie geométrica.*

(d.2) $xF(1,1,2,-x) = \ln(1+x) \quad |x| < 1.$

(d.3) $xF(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -x^2) = \text{arctg}(x) \quad |x| < 1.$

(d.4) $F(-n, 1, 1. - x) = (1 + x)^n.$ *Serie Binomial.*

TAREA 3: Problemas: P1(g), P5, P7, P10, P11, P14, P16, P18, P19, P21.

FECHA DE ENTREGA: Jueves 5 de Nov., **al inicio del Control 6.**

INTEGRANTES: Máximo 5 personas, pueden ser grupos mixtos de ambas secciones.