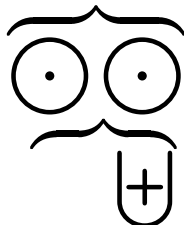


Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Por: Felipe Maldonado C.

Porque lo deberías saber



13 de mayo de 2010

Definición

Definimos las funciones hiperbólicas como siguen:

$$\text{a) } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{b) } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{c) } \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{d) } \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\text{e) } \operatorname{cosh} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\text{f) } \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Derivadas

Las siguientes propiedades son fáciles de corroborar, basta sólo jugar un poco con la forma de las funciones definidas.

$$\text{a) } \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

$$\text{b) } \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

$$\text{c) } \frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\text{d) } \frac{d}{dx} \coth x = -\operatorname{cosh}^2 x$$

$$\text{e) } \frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\text{f) } \frac{d}{dx} \operatorname{cosh} x = -\operatorname{cosh} x \coth x$$

Identidades Identidades, que son bastante similares con las funciones trigonométricas usuales.

- a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- b) $\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$
- c) $\coth^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1$
- d) $\sinh x \pm y = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$
- e) $\cosh x \pm y = \cosh x \cosh y \pm \sinh y \sinh x$
- f) $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx, \quad n \in \mathbb{N}$

Utilidad Hay ciertas integrales que son muy fáciles de resolver utilizando cambios de variables hiperbólicos, por ejemplo

- a) $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$
- b) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$
- c) $\int \frac{du}{1-u^2}$

En efecto las calcularé para que lo vean XD.

- a) Hacemos el cambio de variables $u = \sinh x$, $\Rightarrow du = \cosh x \, dx$, y $\sqrt{1+u^2} = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \sqrt{\cosh^2 x} = \cosh x$ Luego tenemos que $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{\cosh x \, dx}{\cosh x} = \int dx = x = \sinh^{-1} u$
- b) Hacemos el cambio de variables $u = \cosh x$, $\Rightarrow du = \sinh x \, dx$, y $\sqrt{u^2-1} = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \sqrt{\sinh^2 x} = \sinh x$ Luego tenemos que $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \int \frac{\sinh x \, dx}{\sinh x} = \int dx = x = \cosh^{-1} u$
- c) Hacemos el cambio de variables $u = \tanh x$, $\Rightarrow du = \operatorname{sech}^2 x \, dx$, y $1-u^2 = 1+\tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ Luego tenemos que $\int \frac{du}{1-u^2} = \int \frac{\operatorname{sech}^2 x \, dx}{\operatorname{sech}^2 x} = \int dx = x = \tanh^{-1} u$

