Examen MA 2601, 2010/1
Prof. Salomé Martínez
Aux. Kasandra Pavez y Emilio Vilches
Duración 3 hrs.

1.

a) (1,2 pt) Sea k un parámetro real. Considere el problema

$$\begin{cases} y''(x) - ky(x) &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) &= 0 \end{cases} \tag{1}$$

Determine todos los valores de k para los cuales este problema admite soluciones no triviales.
Indicación: Considere los casos $k > 0$, $k = 0$ y $k < 0$.

b) (1,3 pt) Utilice transformada de Laplace para resolver el problema de valor inicial

$$y'' + ty' - 2y = 0, \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = 0. \tag{2}$$

Indicación: Suponga que y es de orden exponencial. Recuerde que en este caso $\lim\limits_{s\to+\infty} \mathcal{L}(y)(s) = 0$.

Solución:

a) Usando el polinomio característico se obtiene

$$\lambda^2 = k$$

(i) Caso 1: $k > 0$
En este caso $\lambda = \pm\sqrt{k}$ y por lo tanto

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}$$

imponiendo las condiciones del problema se obtiene que $C_1 = C_2 = 0$.

(ii) Caso 2: $k = 0$
En este caso $\lambda = 0$ y por lo tanto

$$y(x) = C_1 + C_2 x$$

imponiendo las condiciones del problema se obtiene que $C_1 = C_2 = 0$.

(iii) Caso 3: $k < 0$

En este caso $\lambda = \pm\sqrt{-k}i$ y por lo tanto

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{-k}x) + C_2 \cos(\sqrt{-k}x)$$

se impone la primera condición del problema

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

luego

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{-k}x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = C_1\sqrt{-k}\cos(\sqrt{-k}x).$$

La segunda condición del problema dice que

$$C_1\sqrt{-k}\cos(\sqrt{-k}\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Entonces, para que haya solución no trivial debemos imponer que

$$\sqrt{-k}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

es decir $k = -(1+2n)^2, \quad n \in \mathbb{Z}$.

En resumen el problema (1) admite soluciones no triviales si y sólo si

$$\lambda = -(1+2n)^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

b) Tomando transformada de Laplace en (2) se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(ty') - 2\mathcal{L}(y) &= \mathcal{L}(0) && \Leftrightarrow \\
s^2\mathcal{L}(y)(s) - sy(0) - y'(0) - s\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)(s) - \mathcal{L}(y)(s) - 2\mathcal{L}(y)(s) &= 0 && \Leftrightarrow \\
s^2\mathcal{L}(y)(s) - a_0 s - \left(s\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)(s) + \mathcal{L}(y)(s)\right) - 2\mathcal{L}(y)(s) &= 0 && \Leftrightarrow \\
\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)(s) + \left(\frac{3}{s} - s\right)\mathcal{L}(y)(s) &= -a_0. && (3)
\end{aligned}$$

Ahora (3) se puede resolver usando el factor integrante $\mu = e^{\int\left(\frac{3}{s}-s\right)ds} = s^3 e^{-s^2/2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}(y)(s)s^3e^{-s^2/2}\right) &= -a_0 s^3 e^{-s^2/2} && \Leftrightarrow \\
\mathcal{L}(y)(s)s^3e^{-s^2/2} &= -\int a_0 s^3 e^{-s^2/2} ds + C && \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Usando el cambio de variables $u = -s^2/2$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y)(s)s^3e^{-s^2/2} &= -2a_0\int ue^u du \\
&= -2a_0\left(\frac{-s^2}{2}e^{-s^2/2} - e^{-s^2/2}\right) + C
\end{aligned}$$

Así,

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{a_0}{s} + 2\frac{a_0}{s^3} + \frac{C}{s^3}e^{s^2/2}.$$

Puesto que $\mathcal{L}(y)(s) \to 0$ cuando $s \to +\infty$, debemos tener que $C = 0$ y entonces

$$\mathcal{L}(y)(s) = 2\frac{a_0}{s^3} + \frac{a_0}{s}.$$

Tomando antitransformada

$$y(t) = a_0 t^2 + a_0.$$