Examen MA 2601, 2010/1
Prof. Salomé Martínez
Aux. Kasandra Pavez y Emilio Vilches
Duración 3 hrs.

1.

a) (1,2 pt) Sea k un parámetro real. Considere el problema

$$\begin{cases} y''(x) - ky(x) & = 0 \\ y(0) & = 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) & = 0 \end{cases}$$

Determine todos los valores de k para los cuales este problema admite soluciones no triviales.
Indicación: Considere los casos $k > 0$, $k = 0$ y $k < 0$.

b) (1,3 pt) Utilice transformada de Laplace para resolver el problema de valor inicial

$$y'' + ty' - 2y = 0, \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = 0.$$

Indicación: Suponga que y es de orden exponencial. Recuerde que en este caso $\lim\limits_{s \to +\infty} \mathcal{L}(y)(s) = 0$.

2.

a) Considere el sistema $x' = A(t)x$, con $A : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ continua.

(i) (0,4 pt) Demuestre que si $W(t)$ es una solución fundamental del sistema, entonces

$$\det W(t) = Ce^{\int a_{11}(t)+a_{22}(t)\,dt},$$

con C constante.

(ii) (0,3 pt) Demuestre que el sistema

$$\begin{aligned} x_1' = &\ tx_1 + x_2 \\ x_2' = &\ x_1 \sin t + x_2 \cos t \end{aligned}$$

tiene al menos una solución no acotada en $\mathbb{R}$.

b) (1,3 pt) Determine la solución general del sistema $x' = Ax$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sabiendo que $\lambda = 2$ es valor propio de A.

3.

a) Considere el sistema

$$x' = 2xy,\ y' = y^2 - x^2.$$

(i) (0,1 pt) Determine los puntos de equilibrio del sistema.

(ii) (0,4 pt) Bosqueje el diagrama de fase, usando las nulclinas del sistema (curvas donde $x' = 0$ o $y' = 0$.).

(iii) (0,2 pt) Determine las soluciones con condición inicial $(0, y_0)$ con $y_0 \in \mathbb{R}$.

(iv) (0,3 pt) Demuestre que si $(x(t), y(t))$ es una solución con condición inicial (x_0, y_0) con $x_0 \neq 0$, entonces $x(t) \neq 0$ para todo t y existe una constante C tal que

$$\frac{x^2(t) + y^2(t)}{x(t)} = C.$$

(v) (0,4) Si $(x(t), y(t))$ es una solución con $x(0) \neq 0$, pruebe que la trayectoria $(x(t), y(t))$ está contenida en una circunferencia. Si $(x(t), y(t))$ está definida para todo t ¿Qué puede decir de $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t))$, $\lim_{t\to-\infty}(x(t), y(t))$?.

b) (0,6 pt) Bosqueje el diagrama de fase para el sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} x.$$

Clasifique que tipo de equilibrio es $(0, 0)$ e indique si es estable o inestable.