

MA2601 Ecuaciones diferenciales ordinarias. Semestre 2010-01

Profesor: Salomé Martínez Auxiliares: Kasandra Pavez y Emilio Vilches

Auxiliar extra

Sábado 10 de julio de 2010

P1. Esboce el diagrama de fase asociado a la siguiente ecuación

$$x'' + x^3 - x = 0.$$

P2. (a) Considere el sistema $x' = -\nabla V(x)$, con $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 .

(i) Pruebe que si $x(t)$ es solución del sistema, entonces $V(x(t))$ es decreciente.

(ii) Pruebe que si \bar{x} es un mínimo aislado, es decir existe una bola $B_\varepsilon(\bar{x})$ tal que $V(x) > V(\bar{x})$ para todo $x \in B_\varepsilon(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$, entonces \bar{x} es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Indicación: Considere $E(x) = V(x) - V(\bar{x})$.

(b) Considere la ecuación $x'' + ax' + f(x) = 0$ con $a > 0$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , $f(0) = 0$ y $xf(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Pruebe que la solución nula es asintóticamente estable.

P3. En un habitat cerrado y auto-suficiente coexisten dos especies cuyas poblaciones se rigen por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x' = 14x - 2x^2 - xy$$

$$y' = 16y - 2y^2 - xy$$

Indique la naturaleza de los puntos críticos del sistema. Bosqueje el diagrama de fase del sistema no lineal. En base a lo último indique si hay coexistencia de las especies.

P4. Considere el sistema no lineal autónomo

$$x' = x \left(10 - x - \frac{1}{2}x \right)$$

$$y' = y(16 - y - x).$$

Indique la naturaleza de los puntos críticos del sistema. Bosqueje el diagrama de fase del sistema para $x \geq 0$ y $y \geq 0$.