

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

MA26A

Sistemas No Lineales

Profesor: Axel Osses, Auxiliares: Jorge Lemus, Oscar Peredo

7 de Noviembre del 2005

1. Definiciones y Propiedades

Definición 1 (SNLA). Dado I un intervalo abierto no vacío, y una función $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se define un sistema de ecuaciones diferenciable de primer orden con condición inicial $X_0 \in \mathbb{R}^n$ en $t_0 \in I$, por:

$$\begin{aligned}X' &= F(t, X), \quad t \in I \\X(t_0) &= X_0.\end{aligned}$$

Si la función F es no lineal con respecto a la variable X , se dirá que es un sistema *no lineal* (SNL). Si además F no depende explícitamente de la variable t , se dirá que es un sistema no lineal *autónomo* (SNLA).

Se llama *vector de estado* a $X(t) \in \mathbb{R}^n$, que es la solución del sistema en un punto $t \in I$.

Definición 2 (Puntos críticos (aislados o densos)). Se llama *punto crítico* (o *punto de equilibrio*) de un sistema al punto $(\bar{x}, \bar{y})$ cuando cumple que:

$$\begin{aligned}F(\bar{x}, \bar{y}) &= 0 \\G(\bar{x}, \bar{y}) &= 0.\end{aligned}$$

El conjunto de puntos críticos del sistema se denota por

$$\mathcal{C} = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}.$$

Un punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ se dice *aislado* si existe $\delta > 0$ tal no existe otro punto crítico en la bola

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 < \delta^2\},$$

de lo contrario se dice que los puntos críticos son *densos* en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$.

Definición 3 (Matriz Jacobiana). Para la función $(x, y) \rightarrow (F(x, y), G(x, y))$ se define la matriz Jacobiana en (x_0, y_0) de la forma

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Definición 4 (Sistema Linealizado (SL)).

$$(SL) \begin{cases} x' = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) \\ y' = \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) \end{cases}$$

O equivalentemente:

$$(SL) \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = J(\bar{x}, \bar{y}) \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix} \right.$$

Propiedades 1. Dado un (SNLA), y (x_0, y_0) un punto crítico de este sistema:

- (i) Si $|J(x_0, y_0)| \neq 0$, entonces (x_0, y_0) es el único punto crítico del (SL), donde resulta ser aislado.
- (ii) Si $|J(x_0, y_0)| = 0$, entonces los puntos críticos del (SL) son densos. Más aún, su lugar geométrico es una recta (que contiene a (x_0, y_0)) si alg'un coeficiente del Jacobiano es distinto de cero, y es todo el plano en caso de que el Jacobiano tenga todos sus términos nulos.
- (iii) Si $|J(x_0, y_0)| \neq 0$, entonces (x_0, y_0) es un punto crítico aislado del (SNLA).

Definición 5. Una trayectoria $t \rightarrow (x(t), y(t))$ **converge** a un punto crítico (x^*, y^*) si $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*$.

Y decimos que la trayectoria **diverge** desde un punto crítico (x^*, y^*) si $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x^*$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = y^*$.

También diremos que **entra** al punto crítico (x^*, y^*) si converge y además el siguiente límite existe: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t) - y^*}{x(t) - x^*}$.

Análogamente, **sale** del punto crítico (diverge y existe el límite tendiendo a $-\infty$).

Definición 6. Un **nodo** es un punto crítico aislado donde las trayectorias vecinas al punto crítico o bien todas entran o bien todas salen del punto.

Definición 7. Un **punto silla** es un punto crítico aislado donde tenemos un par de trayectorias opuestas que entran, otro par de trayectorias opuestas que salen del punto y el resto son ramas de hipérbolas con asíntotas en las trayectorias anteriores.

Definición 8. Un **punto espiral** es un punto crítico aislado al cual todas las trayectorias vecinas convergen (pero no entran) o bien divergen (pero no salen).

Definición 9. Un **centro** es un punto crítico aislado en una vecindad en la cual todas las trayectorias son cerradas.

Definición 10 (Estabilidad). Un punto crítico se dice estable si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } |(x_0, y_0) - (x^*, y^*)| < \delta \Rightarrow |(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)| < \epsilon, \forall t$$

Es decir, existe una vecindad del punto crítico para ϵ pequeño, de modo tal que tomando condiciones iniciales en esa vecindad, la evolución del sistema se mantiene confinado a una distancia ϵ del punto crítico.

Definición 11 (Asintóticamente Estable). Un punto crítico se dice a. estable si cumple que es estable, pero además

$$\exists \rho > 0 \text{ tal que } |(x_0, y_0) - (x^*, y^*)| < \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$$

2. Análisis Cualitativo de SL

Se tiene el siguiente sistema lineal:

$$(SL) \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

La solución de (SL) es:

$$\begin{aligned} X &= P^{-1}e^{Dt}PX_0 \\ \underbrace{PX}_{\tilde{X}} &= e^{Dt}\underbrace{PX_0}_{\tilde{X}_0} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{x} = e^{t\lambda_1}\tilde{x}_0$ y $\tilde{y} = e^{t\lambda_2}\tilde{y}_0$.

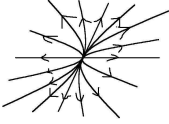
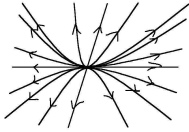
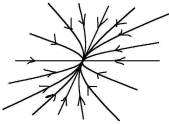
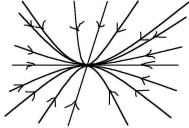
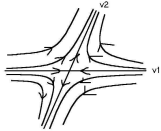
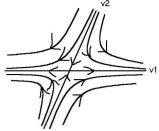
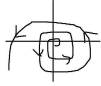
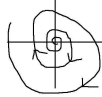
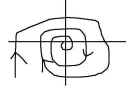
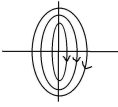
Igualando t se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1} \log \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}_0} &= \frac{1}{\lambda_2} \log \frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0} \\ \frac{\tilde{x}^{\lambda_2}}{\tilde{y}^{\lambda_1}} &= \frac{\tilde{x}_0^{\lambda_2}}{\tilde{y}_0^{\lambda_1}} \end{aligned}$$

Es decir, las trayectorias son de la forma

$$\tilde{y} = C\tilde{x}^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

En la siguiente tabla se encuentran los casos en los que se puede caer al calcular los valores propios.

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2)$ Nodo inestable $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ 	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2)$ Nodo inestable $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ 
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2)$ Nodo a. estable $ \lambda_1 > \lambda_2 > 0, \lambda_1, \lambda_2 < 0$ 	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2)$ Nodo a. estable $ \lambda_2 > \lambda_1 > 0, \lambda_1, \lambda_2 < 0$ 
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ Punto silla inestable 	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ Punto silla inestable 
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0, \beta < 0$ Espiral inestable 	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0, \beta > 0$ Espiral inestable 
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0, \beta < 0$ Espiral a. estable 	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0, \beta > 0$ Espiral a. estable 
$\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ Nodo inestable 	$\lambda_{1,2} = \pm i\beta (\alpha = 0)$ Centro estable 

Problema 1. Encuentre los puntos críticos del SNLA y verifique si es cuasi-lineal en cada uno de ellos. Dibuje el diagrama de fase del sistema.

$$\begin{aligned}x' &= y(1 + x - y^2) \\ y' &= x(1 + y - x^2)\end{aligned}$$

Solución 1. Puntos críticos:

$$\begin{aligned}0 &= y(1 + x - y^2) \\ 0 &= x(1 + y - x^2)\end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones se tiene que los puntos críticos son $\{(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)\}$. Calculemos J :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 1 + x - 3y^2 \\ 1 + y - 3x^2 & x \end{pmatrix}$$

Verifiquemos si el SNLA es cuasi-lineal:

- $|J(0, 0)| = -1 \neq 0$ Cuasi-lineal
- $|J(1, 0)| = 4 \neq 0$ Cuasi-lineal
- $|J(-1, 0)| = 0$ No es Cuasi-lineal
- $|J(0, 1)| = 4 \neq 0$ Cuasi-lineal
- $|J(0, -1)| = 0$ No es Cuasi-lineal

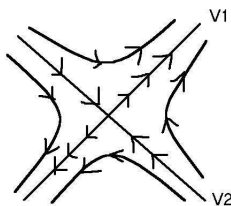
Se hace el análisis cualitativo para los puntos donde el SNLA es cuasi-lineal:

- $(0, 0)$

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X \Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

Luego, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, PUNTO SILLA.

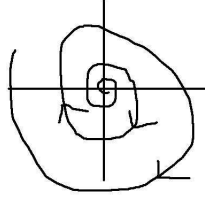
Los vectores propios son $v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1)$, por lo tanto, en una vecindad del centro $(0, 0)$ se tiene el siguiente diagrama:



■ $(1, 0)$

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X + \underbrace{(0, 2)^t}_{\text{se desprecia}} \Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{15}$$

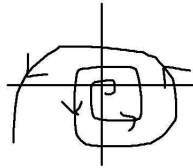
Luego, se trata de una ESPIRAL. Como $\alpha = 1/2$, tenemos dos opciones para escoger, $\beta = \frac{\sqrt{15}}{2}$ o $\beta = -\frac{\sqrt{15}}{2}$. Hay que escoger el espiral cuyas trayectorias coinciden con las trayectorias del diagrama global, por lo tanto escogemos $\beta > 0$. Luego, el diagrama centrado en $(1, 0)$ es:



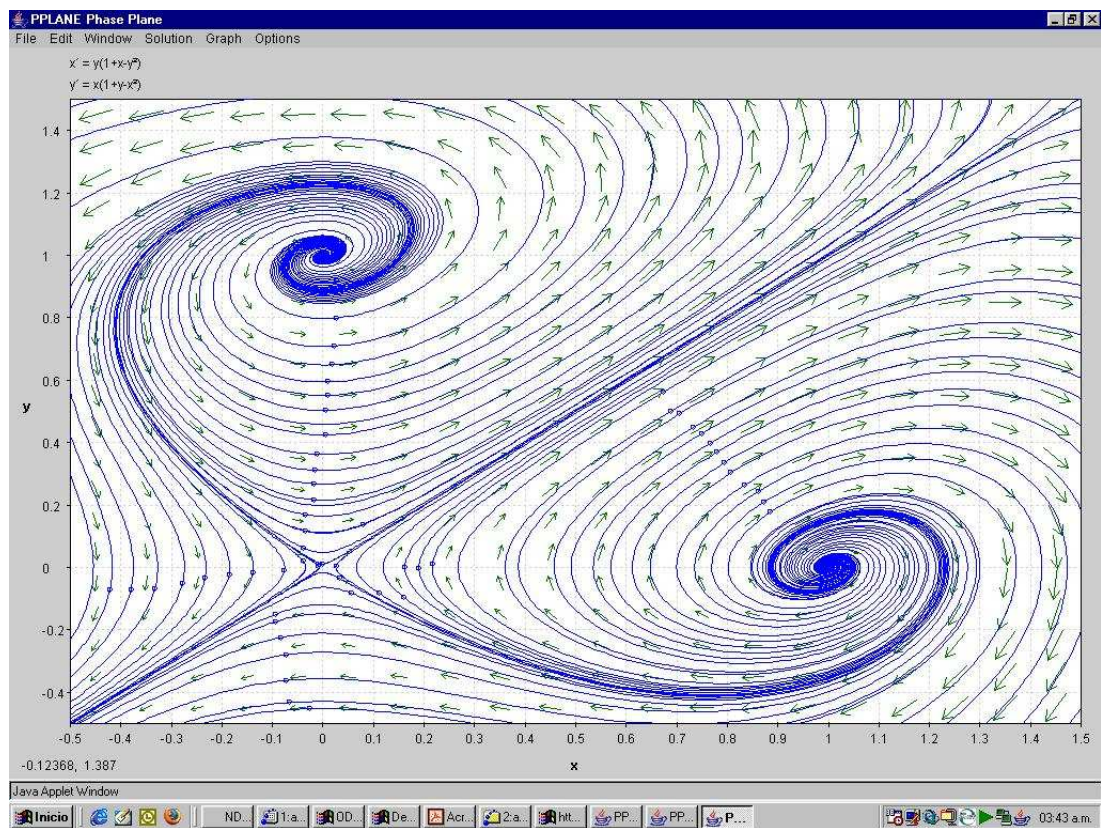
■ $(0, 1)$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} X \Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{15}$$

Luego, se trata de una ESPIRAL. Como $\alpha = 1/2$, tenemos dos opciones para escoger, $\beta = \frac{\sqrt{15}}{2}$ o $\beta = -\frac{\sqrt{15}}{2}$. Hay que escoger el espiral cuyas trayectorias coinciden con las trayectorias del diagrama global, por lo tanto escogemos $\beta < 0$. Luego, el diagrama centrado en $(0, 1)$ es:



El diagrama global es de la forma:



Para comprobar sus diagramas, puede revisar el siguiente applet

<http://math.rice.edu/~dfield/dfpp.html>

seleccionando PPLANE.