

Control 3 MA2G1, 2008

Problema 1

- 1.a) (2 puntos) Determine la solución general de la ecuación:

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2x} \cos x.$$

- 1.b) (4 puntos) La trayectoria $(x(t), y(t))$ de una partícula de masa unitaria satisface las ecuaciones

$$x'' = ay', y'' = -ax'$$

con condiciones iniciales $x(0) = r_0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = ar_0$.

Pruebe que la trayectoria de la partícula describe una circunferencia de radio r_0 .

Problema 2

- 2.a) (3 puntos) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz diagonalizable con todos sus valores propios reales y negativos. Demuestre que si $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface

$$x'' = Ax,$$

entonces existe una constante $C > 0$ tal que $\|x(t)\| \leq C$ para todo $t \in \mathbb{R}$. *Ind: Considere el cambio de variables $x = Py$ con una matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ apropiada.*

- 2.b) (3 puntos) Utilizando el cambio de variables de la parte 2.a) resuelva el sistema:

$$\begin{aligned} x_1'' &= -3x_1 + x_2 \\ x_2'' &= 2x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

Problema 3 Considere el sistema de depredador-presa:

$$\begin{aligned} x' &= x(2 - x - y) \\ y' &= y(-1 + 2x - y) \end{aligned} \tag{1}$$

- 3.a) (3 puntos) Determine los puntos críticos (o puntos de equilibrio) de este sistema y clasifíquelos de acuerdo a su estabilidad.

- 3.b) (1 punto) Bosqueje en el diagrama de fase del sistema en el primer cuadrante, $x \geq 0$, $y \geq 0$, la velocidad de las trayectorias (es decir los vectores (x', y')) sobre las nulclinas o isoclinas (semi-rectas en donde se tiene $x' = 0$ o $y' = 0$).
- 3.c) (1 punto) Para $x > 0$, $y > 0$ se define $V(x, y) = -2 \log x + x - \log y + y$. Demuestre que si $(x(t), y(t))$ es una solución positiva de (1) entonces

$$\frac{dV(x(t), y(t))}{dt} \leq 0.$$

- 3.d) (1 punto) Recuerde que una función $(x, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ se dice periódica si existe $T > 0$ tal que $(x(t + T), y(t + T)) = (x(t), y(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde $T > 0$. Demuestre que el sistema (1) no posee soluciones periódicas positivas.