Pauta P3 Control 3 MA 2601, 2010/1

Prof. Salomé Martínez

Aux. Kasandra Pavez y Emilio Vilches

Duración 3 hrs.

3. *a*) (3pt) Considere el sistema
$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} X.$$
Determine la solución general de este sistema. Sea $X(t)$ la solución del sistema con $X(0) = X_0$ ¿Para que condiciones iniciales X_0 se tiene que $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$?

b) Considere el sistema $X' = A(t)X$ donde $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N\times N}$ es continua y de período $T > 0$, es decir, $A(t+T) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

1) (1.5pt) Sea W matriz solución de $W' = A(t)W$ con $W(0) = I$. Demuestre que $W(t+T) = W(t)W(T)$.

2) (1.5pt) Suponga que N es impar. Demuestre que existe una solución $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ del sistema, tal que para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $X(t+T) = \lambda X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
Indicación: Utilice la parte anterior para determinar que condición debe satisfacer λ.

Solución:

a) Calculamos el polinomio característico,
$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 5 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)(-4-\lambda) - 20 = (\lambda+8)(\lambda-1)$$
luego los valores propios son: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -8$. Ahora calculamos los vectores propios:

1) Para λ_1:
$$\begin{pmatrix} -3-1 & 5 \\ 4 & -4-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow$$
$$\begin{aligned} -4v + 5w &= 0 \\ 4v - 5w &= 0 \end{aligned}$$
Luego $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ es vector propio asociado a λ_1.

2) Para $\lambda_2 = -8$:
$$\begin{pmatrix} -3+8 & 5 \\ 4 & -4+8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow$$
$$\begin{aligned} 5v + 5w &= 0 \\ 4v + 4w &= 0 \end{aligned}$$
Luego $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio asociado a λ_2. Luego la solución general del sistema es
$$X(t) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-8t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5C_1e^t - C_2e^{-8t} \\ 4C_1e^t + C_2e^{-8t} \end{pmatrix}$$

luego para que $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$ debemos imponer que $C_1 = 0$. Luego la condición inicial debe tener la forma:

$$X(0) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

b) 1) Sea $X_0 \in \mathbb{R}^N$. Consideremos las funciones

$$X_1(t) = W(t+T)X_0$$
$$X_2(t) = W(t)W(T)X_0$$

entonces X_1 y X_2 satisfacen el sistema

$$X'(t) = A(t)X(t)$$
$$X(0) = W(T)X_0$$

En efecto:

$$X_1'(t) = W'(t+T)X_0 = A(t+T)W(t+T)X_0 = A(t)W(t+T)X_0 = A(t)X_1(t)$$
$$X_1(0) = W(0+T)X_0 = W(T)X_0,$$

análogamente:

$$X_2'(t) = W'(t)W(T)X_0 = A(t)W(T)X_0 = A(t)W(t)W(T)X_0 = A(t)X_2(t)$$
$$X_2(0) = W(0)W(T)X_0 = I_nW(T)X_0 = W(T)X_0.$$

Luego, por el teorema de existencia y unicidad, se tiene que $X_1(t) = X_2(t)$ para todo t. Luego

$$W(t+T)X_0 = W(t)W(T)X_0 \quad \forall X_0 \in \mathbb{R}^N$$

de donde se concluye que

$$W(t+T) = W(t)W(T) \quad \forall t.$$

2) Las soluciones del sistema $X'(t) = A(t)X(t)$ son de la forma

$$X(t) = W(t)X_0$$

donde $X_0 \in \mathbb{R}^N$. Por lo tanto

$$X(t+T) = W(t+T)X_0 = W(t)W(T)X_0$$

luego si X_0 es un vector propio de $W(T)$ asociado a un *valor propio real* se tendrá que $W(T)X_0 = \lambda X_0$, luego

$$X(t+T) = W(t+T)X_0 = W(t)W(T)X_0 = \lambda W(t)X_0 = \lambda X(t).$$

Así basta demostrar que la matriz $W(T)$ tiene un valor propio real. Por otro lado, sabemos que los valores propios de $W(t)$ se obtienen al calcular las raíces del polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det W(T)$$

y como la dimensión del espacio es impar $p(\lambda)$ es un polinomio de grado impar, luego posee una raíz real. Por lo tanto existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$X(t+T)\lambda X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$