Pauta P1 Control 3 MA 2601, 2010/1

Prof. Salomé Martínez

Aux. Kasandra Pavez y Emilio Vilches

Duración 3 hrs.

1. *a*) (2pt) Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{s+2}\right)\right)$.

   b) (1pt) Pruebe que $\mathcal{L}(ty')(s) = -s\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)(s) - \mathcal{L}(y)(s)$.

   c) (3pt) Usando transformada de Laplace resuelva la siguiente EDO

$$y'' + ty' - 2y = 4, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0. \tag{1}$$

   Indicación: Use *b*) para probar que si y es solución de (1), entonces $\mathcal{L}(y)$ satisface

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)(s) + \left(\frac{3}{s} - s\right)\mathcal{L}(y)(s) = -\frac{4}{s^2} + 1.$$

   y recuerde que $\mathcal{L}(y)(s) \to 0$ cuando $s \to +\infty$.

Solución:

a) Debemos calcular $\mathcal{L}^{-1}\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{s+2}\right)\right)$. Para ello usamos que:

$$\frac{d}{ds}\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{s+2}\right)\right) = \frac{-3}{(s+2)^2+9}$$

pero el lado derecho se puede escribir como:

$$\frac{-3}{(s+2)^2+9} = -\mathcal{L}(\sin(3t))(s+2) = -\mathcal{L}(e^{-2}\sin(3t))(s)$$

por lo tanto

$$\frac{d}{ds}\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{s+2}\right)\right) = -\mathcal{L}(e^{-2t}\sin(3t))(s)$$

integrando entre s y $+\infty$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\tan^{-1}\left(\frac{3}{s+2}\right)\Big|_s^{+\infty} &= -\int_s^{+\infty}\mathcal{L}\left(e^{-2t}\sin(3t)\right)(s)ds && \Leftrightarrow\\
0 - \tan^{-1}\left(\frac{3}{s+2}\right) &= -\mathcal{L}\left(\frac{e^{-2t}\sin(3t)}{t}\right) && \Leftrightarrow\\
\tan^{-1}\left(\frac{3}{s+2}\right) &= \mathcal{L}\left(\frac{e^{-2t}\sin(3t)}{t}\right)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{e^{-2t}\sin(3t)}{t}$ existe. Tomando antitransformada se concluye que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{s+2}\right)\right) = \frac{e^{-2t}\sin(3t)}{t}.$$

b) En efecto:

$$\mathcal{L}(ty')(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y')(s) = -\frac{d}{ds}\left(s\mathcal{L}(y)(s) - y(0^+)\right) = -s\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)(s) - \mathcal{L}(y)(s).$$

c) Tomando transformada de Laplace en (1) se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(ty') - 2\mathcal{L}(y) &= \mathcal{L}(4) && \Leftrightarrow \\
s^2\mathcal{L}(y)(s) - sy(0) - y'(0) - s\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)(s) - \mathcal{L}(y)(s) - 2\mathcal{L}(y)(s) &= \mathcal{L}(4)(s) && \Leftrightarrow \\
s^2\mathcal{L}(y)(s) + s - \left(s\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)(s) + \mathcal{L}(y)(s)\right) - 2\mathcal{L}(y)(s) &= \frac{4}{s} && \Leftrightarrow \\
\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)(s) + \left(\frac{3}{s} - s\right)\mathcal{L}(y)(s) &= -\frac{4}{s^2} + 1. && (2)
\end{aligned}$$

Ahora (2) se puede resolver usando el factor integrante $\mu = e^{\int\left(\frac{3}{s}-s\right)ds} = s^3e^{-s^2/2}$. Por lo tanto

$$\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}(y)(s)s^3e^{-s^2/2}\right) = -\frac{4}{s^2}s^3e^{-s^2/2} + s^3e^{-s^2/2},$$

Usando el cambio de variables $u = -s^2/2$ en ambas integrales

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y)(s)s^3e^{-s^2/2} &= 4\int e^u du + 2\int ue^u du \\
&= 4e^{-s^2/2} + 2\left(\frac{-s^2}{2}e^{-s^2/2} - e^{-s^2/2}\right) + C
\end{aligned}$$

As,

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{C}{s^3}e^{s^2/2}.$$

Puesto que $\mathcal{L}(y)(s) \to 0$ cuando $s \to +\infty$, debemos tener que $C = 0$ y entonces

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s}.$$

Tomando antitransformada

$$y(t) = t^2 - 1.$$