MA2601 Ecuaciones diferenciales ordinarias. Semestre 2010-01
Profesor: Salomé Martinez **Auxiliares:** Kasandra Pavez y Emilio Vilches

Auxiliar extra

Lunes 14 de junio de 2010

P1. Calcule
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right).$$

P2. Encuentre una solución de la ecuación
$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 2y &= f(t) \\ y'(0) &= -1 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$
donde f es una función de orden exponencial.

P3. Suponiendo que f es continua por pedazos y de orden exponencial, encuentre f tal que $f(0) = 0$ y que sea solución de la ecuación integro-diferencial siguiente
$$f'(t) = \sin(t) + \int_0^t f(t-\sigma)\cos(\sigma)d\sigma.$$

P4. Encuentre la solución general del sistema
$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 2x_1 - 2x_2. \end{aligned}$$

P5. Considere el sistema de ecuaciones
$$x' = Ax, \tag{1}$$
donde $A \in M_{n\times n}$ es una matriz constante. Sea $W(t)$ la matriz fundamental canónica de (1), esto es la matriz fundamental tal que $W(0) = I_n$, la matriz identidad de $n \times n$. Demuestre que $W(t)$ satisface
$$W(t+s) = W(t)W(s), \tag{2}$$
para todo $t, s \in \mathbb{R}$.
Indicación: Considere la ecuación satisfecha por ambos miembros de (2) como funciones de t, para s fijo.

P6. Considere el sistema de ecuaciones
$$x' = Ax + e^{\lambda t}b \tag{3}$$
donde $A \in M_{n\times n}$ es una matriz constante, $b \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante y λ *no* es un valor propio de A. Muestre que (3) tiene una solución de la forma
$$x(t) = e^{\lambda t}c,$$
donde c es un vector constante.
Indicación: Recuerde que si λ no es un valor propio de A entonces la matriz $A - \lambda I_n$ es invertible.

P7. Considere el sistema $x' = Ax$, tal que A es antisimétrica, es decir, $A^T = -A$. Demuestre que si $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}^n$ son soluciones del sistema y ortogonales en algún t_0, entonces $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son ortogonales para todo t.

P8. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones
$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

P9. Sea A una matrix de $n \times n$ que satisface $A^2 + A = -I_n$. Encuentre la solución general del sistema
$$x' = Ax.$$

P10. Sea $A(t)$ una matriz simétrica de $n \times n$ de coeficientes continuos en toda la recta real, tal que $A(t)$ es invertible $\forall t > 0$.
Considere el sistema $x'(t) = Ax(t)$. Suponga que existe una constante $\eta > 0$ tal que para todo valor propio $\lambda_i(t)$ de $A(t)$ satisface: $\lambda_i(t) < -\eta$ para $i = 1, \ldots, n$. Demuestre que toda solución $x(t)$ de este sistema satisface
$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$$
Indicación: Recuerde que existe una base ortonormal $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$ de vectores propios de $A(t)$ respectivamente asociados a $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)$. Utilice esto para deducir que $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 \le -\eta\|x(t)\|^2$.