Guía 2 MA 26A, 2007/1

Prof. Salomé Martínez
Aux. Nicolás Carreño, Francisco Collarte, Miguel Concha

(1) Determinar la transformada de Laplace de la función serrucho

$$f(t) = \frac{t}{a} \text{ para } 0 \leq t < a,$$

extendida de manera periódica con período $a > 0$ fijo.

(2) Determine la transformada de Laplace de $f(t) = |\sin t|$.

(3) Encuentre la solución general de

$$x'' + 4x' + 4x = f(t),$$

donde $f(t) = t$ si $1 \leq t \leq 2$ y $f(t) = 0$ en $\mathbb{R} \setminus [1, 2]$.

(4) Resuelva la ecuación

$$x'' + x = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\pi) \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

y describa el comportamiento cuando $t \to \infty$.

(5) Resuelva la ecuación

$$x'' + x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta(t - n\pi) \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

y describa el comportamiento cuando $t \to \infty$.

(6) Encuentre la función respuesta al impulso para los problemas

$$x'' + 6x' + 9x = f.$$

$$x'' + 4x' + 8x = f.$$

(7) Sean $a_0, ..., a_{n-1}$ constantes. Encuetre el problema de valor inicial homogéneo equivalente a

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + ... + a_0 x = \delta,$$

$$x(0) = x'(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0.$$

(8) Resuelva utilizando transformada de Laplace los siguientes sistemas

$$x'' + 3y' + 3y = 0$$
$$x'' + 3y = te^{-t}$$
$$x(0) = 0, \; x'(0) = 2, \; y(0) = 0.$$

$$\begin{aligned} x' &= 4x - 2y + 2U(t-1) \\ y' &= 3x - y + U(t-1) \\ x(0) &= 0, \ y(0) = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

(9) Sea A una matriz diagonalizable. ¿Qué condición en los valores propios de A garantiza que todas las soluciones del sistema $x' = Ax$ converjan a 0 cuando $t \to \infty$? ¿Qué pasa en el caso en que A no es diagonalizable?

(10) Encuentre una matriz A de 2×2 tal que una solución de $x' = Ax$ esté dada por $x(t) = (e^{2t} - e^{-t}, e^{2t} + 2e^{-t})$.

(11) Resuelva el problema de valor inicial $x' = Ax$, $x(0) = (0, -b, b)$ con $b \in \mathbb{R}$ para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(12) Determine la solución general del sistema lineal no homogéneo

$$\begin{aligned} x' &= x + y + z \\ y' &= -2y + t \\ z' &= 2z + \sin t \end{aligned}$$

(13) Considere A, B matrices en $\mathbb{R}^{N\times N}$ tales que $AB = BA$ demuestre que
   (a) $e^A B = B e^A$.
   (b) $e^{A+B} = e^A e^B$.

(14) Considere A matriz en $\mathbb{R}^{N\times N}$.
   (a) Demuestre que $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
   (b) Demuestre que $e^{A^T} = (e^A)^T$.

(15) Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Demuestre que las siguientes son equivalentes:
   (a) Todos los valores propios de A tienen parte real positiva.
   (b) Para cualquier norma $||\cdot||$ de $\mathbb{R}^N$ se tiene que existen constantes $L > 0$ y $\alpha > 0$ tales que
   $$||e^{tA}x|| \geq Le^{ta}||x||,$$
   para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$.
   (c) Existe $a > 0$ y una norma $||\cdot||_*$ de $\mathbb{R}^N$ tal que
   $$||e^{tA}x||_* \geq e^{ta}||x||_*,$$
   para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$.

(16) Considere el sistema lineal de segundo orden

$$(1) \quad \begin{cases} x'' - 2y' + 3x = 0, \\ y'' + 2x' + 3y = 0. \end{cases}$$

Escriba el sistema como un sistema de primer orden. Encuentre la solución general de (1). Determine la solución de (1) con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = y(0) = 0$, $y'(0) = -3$.

(17) Calcule e^{tA} para A dada por
$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

(18) Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Suponga que α no es un valor propio de A.
 (a) Probar que la ecuación $x' = Ax + e^{\alpha}b$ tiene una única solución de la forma $x(t) = e^{\alpha t}u$, con $u \in \mathbb{R}^N$.
 (b) Encontrar la solución general del sistema
$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^{2t} \\ y' = x + 2y - e^{2t} \end{cases}$$

(19) Considere
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$
 (a) Verifique que $A^3 = 0$ y calcule e^{At}.
 (b) Resuelva el sistema no homogéneo $x' = Ax + f(t)$ donde $f(t) = (0, e^t, t)^T$, con condición inicial $x(0) = (1, 0, 0)^T$.

(20) Bosqueje el diagramas de fase para los siguientes sistemas
 (a) $x' = x - 2y$, $y' = 2x - 3y$.
 (b) $x' = x - 2y$, $y' = 5x - y$.
 (c) $x' = 2x - 2y$, $y' = 4x - 2y$.
 (d) $x' = 4x - y$, $y' = 2x + y$.
 (e) $x' = x - 3y$, $y' = 6x - 5y$.

(21) Considere el sistema con dos masas (m_1, m_2) y tres resortes (de constantes k_1, k_2, k_3) descrito por el siguiente sistema:
$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2 \end{aligned}$$
Determine las soluciones generales cuando $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$.

(22) Se tiene tres tanques con salmuera conectados cada uno de volumen $V_1 = 20$, $V_2 = 40$ y $V_3 = 50$ litros. Agua pura fluye al tanque 1 a una tasa de $10 lt/min$, mientras que salmuera fluye del tanque 1 al tanque 2 a una tasa de $10 lt/min$, y salmuera fluye del tanque 2 al tanque 3 a una tasa de $10 lt/min$. Finalmente salmuera sale del tanque 3 también a una tasa de $10 lt/min$. Si las cantidades iniciales de sal en cada tanque están

dadas por $C_1 = 15kg$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$ y los tres tanques están llenos, determine la concentración de sal en cada tanque como función del tiempo.