Pauta P3 Control 2 MA 2601, 2010/1

Prof. Salomé Martínez

Aux. Kasandra Pavez y Emilio Vilches

3. Considere el sistema de estanques de igual sección transversal S, unidos por una tubería de sección A y largo L (ver figura 1). inicialmente el nivel de los estanques es el mismo y el sistema está en equilibrio. En el instante $t = 0$ comienza a descargarse en el estanque de la derecha un caudal $Q(t) = \alpha t$, con $\alpha > 0$ constante. La ecuación diferencial que modela el sistema antes descrito cuando el flujo que circula por la cañería es laminar es:

$$\begin{aligned} &y'' + ay' + by = c + act \quad \forall t \geq 0 \\ &y(0) = 0 \quad y'(0) = 0, \end{aligned}$$

donde $y(t)$ es la diferencia de nivel de los estanques en el instante t, $a = \frac{32\nu}{D^2} > 0$, $b = \frac{2Ag}{SL} > 0$, $c = \frac{\alpha}{S} > 0$, con ν= viscosidad cinemática del fluido.

a) Encuentre $y(t)$ cuando no existen pérdidas friccionales en el sistema, es decir, cuando $\nu = 0$ (i.e. $a = 0$).

b) Encuentre la solución general $y(t)$ cuando $a \neq 0$, analizando separadamente los casos $a^2 = 4b$, $a^2 > 4b$ y $a^2 < 4b$. Bosqueje la solución en cada caso en función de t.

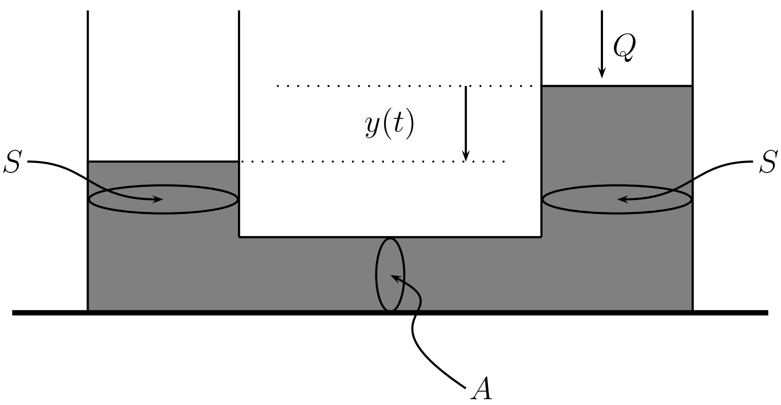

Figura 1: Sistema de estanques.

Solucin:

a) En el caso que $a = 0$, la ecuación queda

$$\begin{aligned} &y'' + by = c \quad \forall t \geq 0 \\ &y(0) = 0 \quad y'(0) = 0, \end{aligned}$$

resolvemos la ecuación homogénea usando polinomio característico;

$$\lambda^2 + b = 0$$

es decir $\lambda = \pm\sqrt{b}i$. Por lo tanto la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = C_1 \sin(\sqrt{b}x) + C_2 \cos(\sqrt{b}x)$$

no es difícil notar que la solución particular viene dada por

$$y_p(x) = \frac{c}{b}.$$

Luego la solución general viene dada por

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{b}x) + C_2 \cos(\sqrt{b}x) + \frac{c}{b}.$$

imponemos las condiciones iniciales, para obtener;

$$C_1 = 0 \qquad C_2 = -\frac{c}{b}.$$

Finalmente, la solución en el caso en que no hay pérdidas friccionales, es:

$$y(x) = -\frac{c}{b}\cos(\sqrt{b}x) + \frac{c}{b}.$$

b) Buscamos una solución particular, para ello buscamos soluciones de la forma

$$y_p(x) = a_1 t + a_2$$

reemplazando y_p en la EDO se obtiene que

$$a_1 = \frac{ac}{b} \qquad a_2 = \frac{c}{b} - \frac{a^2 c}{b^2}.$$

Por lo tanto la solución particular viene dada por:

$$y_p(x) = \frac{ac}{b}t + \left(\frac{c}{b} - \frac{a^2 c}{b^2}\right).$$

Resolvemos la ecuación homogénea usando polinomio característico:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

i.e.,

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Caso 1. Si $a^2 = 4b$.
La solución homogénea viene dada por:

$$y_h(x) = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a}{2}x}.$$

Por lo tanto la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a}{2}x} + \frac{ac}{b}t + \left(\frac{c}{b} - \frac{a^2 c}{b^2}\right).$$

imponiendo las condiciones iniciales:

$$C_1 = \left(\frac{a^2c}{b^2} - \frac{c}{b}\right) \qquad C_2 = \left(-\frac{3ac}{2b} + \frac{a^3c}{2b^2}\right)$$

Luego la solución viene dada por:

$$y(x) = \left(\frac{a^2c}{b^2} - \frac{c}{b}\right) e^{-\frac{a}{2}x} + \left(-\frac{3ac}{2b} + \frac{a^3c}{2b^2}\right) xe^{-\frac{a}{2}x} + \frac{ac}{b}t + \left(\frac{c}{b} - \frac{a^2c}{b^2}\right).$$

Caso 2. Si $a^2 - 4b > 0$.
Sean

$$\lambda_1 = \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = \left(\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right)$$

La solución homogénea viene dada por:

$$y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Por lo tanto la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{ac}{b}t + \left(\frac{c}{b} - \frac{a^2c}{b^2}\right).$$

imponiendo las condiciones iniciales:

$$C_1 = \lambda_2 \left(\frac{a^2c}{b^2} - \frac{c}{b}\right) + \frac{ac}{b} \qquad C_2 = -\lambda_1 \left(\frac{a^2c}{b^2} - \frac{c}{b}\right) - \frac{ac}{b}$$

Luego la solución viene dada por:

$$y(x) = \left(\lambda_2 \left(\frac{a^2c}{b^2} - \frac{c}{b}\right) + \frac{ac}{b}\right) e^{\lambda_1 x} + \left(-\lambda_1 \left(\frac{a^2c}{b^2} - \frac{c}{b}\right) - \frac{ac}{b}\right) e^{\lambda_2 x} + \frac{ac}{b}t + \left(\frac{c}{b} - \frac{a^2c}{b^2}\right).$$

Caso 3. Si $a^2 - 4b < 0$.
La solución homogénea viene dada por:

$$y_h(x) = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} \sin\left(\sqrt{4b - a^2}x\right) + C_2 e^{-\frac{a}{2}x} \cos\left(\sqrt{4b - a^2}x\right).$$

Por lo tanto la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} \sin\left(\sqrt{4b - a^2}x\right) + C_2 e^{-\frac{a}{2}x} \cos\left(\sqrt{4b - a^2}x\right) + \frac{ac}{b}t + \left(\frac{c}{b} - \frac{a^2c}{b^2}\right).$$

imponiendo las condiciones iniciales:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{4b - a^2}} \left(\frac{a}{2}\left(\frac{a^2c}{b^2} - \frac{c}{b}\right) - \frac{ac}{b}\right) \qquad C_2 = \left(\frac{a^2c}{b^2} - \frac{c}{b}\right) \tag{1}$$

Luego la solución viene dada por:

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} \sin\left(\sqrt{4b - a^2}x\right) + \\ C_2 e^{-\frac{a}{2}x} \cos\left(\sqrt{4b - a^2}x\right) + \frac{ac}{b}t + \left(\frac{c}{b} - \frac{a^2c}{b^2}\right) + \frac{ac}{b}t + \left(\frac{c}{b} - \frac{a^2c}{b^2}\right).$$

con C_1 y C_2 dadas por (1).