Pauta P2 Control 2 MA 2601, 2010/1

Prof. Salomé Martínez
Aux. Kasandra Pavez y Emilio Vilches

2. *a*) Considere el problema de condiciones de borde

$$y'' + p(x)y = g(x) \quad x \in [a,b], \qquad (\star)$$
$$y(a) = y(b) = 0, \qquad (\star\star)$$

donde p, g son funciones continuas en $[a,b]$. Demuestre que si $p(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$ y si este problema posee solución entonces ésta es única.
Indicación: Cuando $g = 0$, multiplique la ecuación por y y realice una integración por partes.

b) Sea y_1 una solución no idénticamente nula y conocida de la ecuación

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \qquad (1)$$

en un intervalo I en el cual $a_2(x) \neq 0$.

(i) Pruebe que toda solución y de (1) satisface una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$y_1(x)\frac{dy}{dx} - y_1'(x)y = f(x)$$

donde f depende sólo de $a_1(x)$ y $a_2(x)$ (salvo una constante). Si $y_1 > 0$ en I deduzca una expresión para una solución y_2 que sea linealmente independiente de y_1.

(ii) Usando lo anterior, determine una base del espacio solución de

$$y'' + (\tan x)y' - 6(\cot^2 x)y = 0 \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

sabiendo que $y_1(x) = \sin^3(x)$ es solución.

Solución:

a) Sean y_1, y_2 dos soluciones de $(\star) - (\star\star)$, entonces $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ satisface la ecuación

$$y'' + p(x)y = 0 \quad x \in [a,b],$$
$$y(a) = y(b) = 0,$$

Multiplicamos la ecuación anterior por y para obtener:

$$y''y + p(x)y^2 = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

integrando entre a y b;

$$\int_a^b y''y\,dx + \int_a^b p(x)y^2 dx = 0$$

y realizando una integración por partes

$$\int_a^b y''y dx = y(x)y'(x)|_a^b - \int_a^b (y'(x))^2 dx = -\int_a^b (y'(x))^2 dx$$

pues $y(a) = y(b) = 0$. Luego,

$$\int_a^b (y'(x))^2 dx = \int_a^b p(x)y^2(x)dx$$

pero como $p(x) \leq 0$, se tiene que $\int_a^b (y'(x))^2 dx = 0$, es decir, $y'(x) = 0$. Usando que $y(a) = y(b) = 0$ se concluye que $y(x) = 0$. Por lo tanto se tiene que $y_1(x) = y_2(x)$ $\forall x \in [a, b]$, es decir, la ecuación tiene solución única.

b) Sean

$$b_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \quad \text{y} \quad b_1(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)} \quad \forall x \in I.$$

entonces y_1 es solución de la ecuación diferencial

$$y_1'' + b_1(x)y_1' + b_0(x)y_1 = 0 \tag{1}$$

sea y una solución de (1), entonces y satisface

$$y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0 \tag{2}$$

Multiplicando (1) por y y (2) por y_1 obtenemos

$$\begin{aligned} yy_1'' + b_1(x)yy_1' + b_0(x)yy_1 = 0 \\ y_1y'' + b_1(x)y_1y' + b_0(x)yy_1 = 0 \end{aligned}$$

sumando $y'y_1'$ en ambas ecuaciones

$$\begin{aligned} yy_1'' + y'y_1' + b_1(x)yy_1' + b_0(x)yy_1 = y'y_1' \\ y_1y'' + y'y_1' + b_1(x)y_1y' + b_0(x)yy_1 = y'y_1' \end{aligned}$$

restando ambas ecuaciones

$$\begin{aligned} [yy_1'' + y'y_1'] - [y_1y'' + y'y_1'] + b_1(x)[yy_1' - y_1y'] = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dx}[y_1y' - y_1'y] + b_1(x)[y_1y' - y_1'y] = 0 \end{aligned}$$

la última corresponde a una ecuación de factor integrante, por lo tanto,

$$y_1y' - y_1'y = Ce^{-\int b_1(x)dx}$$

donde C es una constante arbitraria. Usando factor integrante, obtenemos:

$$y(x) = Ce^{\int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)}dx} \int \frac{e^{-\int b_1(x)}}{y_1(x)} e^{-\int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)}dx} dx = Cy_1(x) \int \frac{e^{-\int b_1(x)}}{y_1^2(x)} dx$$

Adems y e y_1 son linealmente independientes pues:

$$W(y_1, y)(x) = y_1 y' - y_1' y = Ce^{-\int b_1(x)dx} \neq 0.$$

si $C \neq 0$.

c) Usando la parte anterior, $y_1 = \sin^3(x) > 0$ en $(0, \pi/2)$ y $b_1(x) = \tan(x)$. Luego

$$y(x) = C \sin^3(x) \int \frac{e^{-\int \tan(x)}}{\sin^6(x)} dx = \frac{-C}{5 \sin^2(x)}$$

Por lo tanto una base del espacio solución viene dada por

$$\left\{ \sin^3(x), \frac{1}{\sin^2(x)} \right\}.$$