

MA2601 Ecuaciones diferenciales ordinarias. Semestre 2010-01

Profesor: Salomé Martínez Auxiliares: Kasandra Pavez y Emilio Vilches

Auxiliar # 7

Viernes 14 de mayo de 2010

P1. Calcule las siguientes transformadas y antitransformadas.

a) $\mathcal{L}[\sin^2 x]$.

b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right]$.

c) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)}\right]$.

P2. Suponiendo que f es una función continua por partes y de orden exponencial muestre las siguientes propiedades

a) $\mathcal{L}[f(t) \cosh at] = \frac{1}{2} [\mathcal{L}[f](s-a) + \mathcal{L}[f](s+a)]$.

b) $\mathcal{L}[f(t)/t](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f](\tau) d\tau$, donde además, $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)/t$ existe.

P3. Pruebe que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)\right\}(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}.$$

P4. a) Suponga que f es continua por pedazos y T -periódica en $[0, \infty)$, esto es, $f(t+T) = f(t)$ para todo $t > 0$. Demuestre que la transformada de Laplace de f puede calcularse mediante la fórmula

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

b) Defina la función f en el intervalo $0 \leq t < 2$ por

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

y para $t \geq 2$, $f(t+2) = f(t)$. Grafique esta función y calcule su transformada de Laplace.c) Calcule la transformada de $|\sin at|$ y $\cos t$.**P5.** Determine la solución de $y'' - 4y' + 5y = f(t)$ con $f(t) = 1$ si $t \in [0, 1)$, $f(t) = 0$ si $t \in [1, \infty)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.Indicación: $\frac{1}{s((s-a)^2+b^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s-a)^2+b^2}$.**P6.** a) Encuentre la antitransformada de Laplace de:

1) $\frac{1}{s^2(s+1)}$.

2) $\frac{3e^{-2s}}{3s^2+1}$.

b) Use transformada de Laplace para resolver la ecuación integro-diferencial

$$y' + 2y + \int_0^t y(\tau) d\tau = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 2-t, & 1 \leq t < 2, \\ 0, & 2 \leq t \end{cases}$$

sujeta a la condición inicial $y(0) = 1$.

c) Resuelva el problema con condición inicial

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$