

AUXILIAR 3 : EDO

PROFESOR : SALOMÉ MARTINEZ

AUXILIARES : KASANDRA PAVEZ & EMILIO VILCHES

16 de Abril

Problema 1.

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden.

1. $y'' + k^2 y = 0$.
2. $y'' + y' + y = 0$.
3. $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Problema 2.

Considere la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

donde p y q son funciones continuas en $\mathbb{R}$ de período 1. Demuestre que si $\phi(t)$ es solución de (1) tal que $\phi(0) = \phi(1)$ y $\phi'(0) = \phi'(1)$ entonces ϕ es también periódica.

Problema 3. 1. Considere la ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$y''(t) + f(y(t)) = 0 \quad (2)$$

donde $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con $f(s) \geq 0$ para todo $s > 0$. Sea $y(t)$ una solución de (2) definida en un intervalo $[0, T)$. Suponga que

$$A = \int_{y(0)}^{\infty} f(s)ds < +\infty$$

y que $y'(0) > \sqrt{2A}$. Muestre entonces que $y'(t) > 0$ para todo $0 < t < T$. *Indicación:* Muestre primero que si F es una primitiva de f , entonces

$$y'(t)^2 + 2F(y(t)) = \text{Constante}$$

para $t \in [0, T)$.

2. Un cohete es lanzado en dirección radial desde la superficie de la Tierra. Sea $r(t)$ la distancia del cohete al centro de la Tierra. De acuerdo a la ley de gravitación de Newton, la aceleración del cohete, si se desprecian otros efectos está dada por

$$\alpha(t) = r''(t) = -\frac{gR^2}{r(t)^2}$$

donde R es el radio de la Tierra y $g > 0$ es una constante universal. Se le pide demostrar la siguiente afirmación: Si la velocidad inicial v_0 satisface $v_0 > \sqrt{2gR}$, entonces el cohete nunca regresa a la Tierra. Este último número es llamado velocidad de escape.

Problema 4.

Considere la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' - y + y^3 = 0 \quad (3)$$

Encuentre explícitamente una solución $y = \phi(t)$ de (3) definida en todo $t \in \mathbb{R}$, tal que $\phi(0) > 0$, $\phi'(0) = 0$ y

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi(t) = 0.$$

Indicación: Muestre primero que toda solución $y = \phi(t)$ de (3) definida en todo $\mathbb{R}$ debe satisfacer la identidad

$$\frac{\phi'(t)^2}{2} - \frac{\phi(t)^2}{2} + \frac{\phi(t)^4}{4} = C, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$