P1 Encuentre la solución general de

$$y' - 3y = x$$
$$y(0) = y_0$$

sol: $y' - 3y = x$ → Ecuación NO homogénea

factor integrante $e^{-\int 3dx} = e^{-3x}$

$$y'e^{-3x} - 3y \cdot e^{-3x} = xe^{-3x}$$
$$\left(ye^{-3x}\right)' = xe^{-3x} \quad / \int$$
$$ye^{-3x} = \int xe^{-3x}dx + c$$

$$I = \int xe^{-3x}dx = -\frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx = -\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}$$

$u = x \quad du = dx$

$dv = e^{-3x}dx \quad v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$

$$\Rightarrow \quad ye^{-3x} = -\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + c$$

$$y = \frac{-x}{3} - \frac{1}{9} + M(x) \qquad M(x) = c \cdot e^{3x}$$

condiciones iniciales.

$y(0) = y_0$

$$y_0 = \cancel{\frac{-0}{3}} - \frac{1}{9} + c \cdot \overset{1}{\cancel{e^{3\cdot 0}}}$$

$$c = y_0 + \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = -\frac{x}{3} - \frac{1}{9} + \left(y_0 + \frac{1}{9}\right)e^{3x}$$

P | Determine la solución general de la siguiente ecuación:

$$y' = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x$$

sabiendo que $y_1(x) = 1$.

sol: La ecuación es de la forma

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x) \quad \leftarrow \text{Ecuación de Ricatti}$$

La solución es de la forma

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)} \qquad y_1(x) = 1$$

$$\Rightarrow y(x) = 1 + \frac{1}{z(x)} \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$y' = \dfrac{-z'}{z^2}$ reemplazamos y' e y en la ecuación dada

$$\frac{-z'}{z^2} = (1-x)\left(1+\frac{1}{z}\right)^2 + (2x-1)\left(1+\frac{1}{z}\right) - x$$

$$\frac{-z'}{z^2} = \frac{(1-x)(1+z)^2}{z^2} + \frac{(2x-1)(z+1)}{z} - x \quad \Big/ \cdot z^2$$

$$-z' = (1-x)(z^2+2z+1) + z(2xz+2x-z-1) - xz^2$$

$$-z' = \cancel{z^2} + 2z + 1 - \cancel{xz^2} - \cancel{2xz} - x + \cancel{2xz^2} + \cancel{2xz} - \cancel{z^2} - z - \cancel{xz^2}$$

$$-z' = z - x + 1 \quad / \cdot (-1)$$

$$z' = x - z - 1$$

$$z' + z = x - 1 \quad \rightarrow \text{Ecuación Lineal No homogénea.}$$

$$z' + z = x - 1 \quad (*)$$

Factor integrante $\quad e^{\int a_0(x)\,dx} \qquad a_0(x) = 1$

$$\Rightarrow e^{\int dx} = e^x$$

Multiplicamos $(*)$ por el factor integrante

$$z' \cdot e^x + z e^x = e^x (x-1)$$

$$(e^x \cdot z)' = e^x \cdot x - e^x \quad // \int$$

$$e^x \cdot z = \underbrace{\int e^x x\,dx}_{I} - \int e^x dx + C$$

Resolvamos I

$$I = \int e^x x\,dx = x e^x - \int e^x dx$$

$u = x \quad du = dx$

$dv = e^x dx \quad v = e^x$

$$= x e^x - e^x$$

$$\Rightarrow e^x z = e^x x - e^x - e^x + C$$

$$\cancel{e^x} z = \cancel{e^x}(x-2) + A \qquad A = e^{-x} \cdot C$$

$$z = (x-2) + A$$

Volvemos a la variable y

$$y(x) = 1 + \frac{1}{z(x)}$$

$$\boxed{y(x) = 1 + \frac{1}{(x-2+A)}}$$

P | Considere la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2}{x + x^2 y} \quad (*)$$

Determine las soluciones de esta ecuación (implícitamente). Para esto considere el cambio de variables $v = xy$ y verifique que v satisface la ecuación

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x(1+v)}$$

sol: Usando la indicación hacemos un cambio de variables

$$v = xy \;\Big/ \frac{d}{dx} \qquad\qquad v = x \cdot y \Rightarrow y = \frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} = y + x \cdot \frac{dy}{dx}$$

reemplazamos $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} + x \cdot \left(\frac{\frac{v}{x} - x \cdot \frac{v^2}{\cancel{x^2}}}{x + \cancel{x^2} \cdot \frac{v}{\cancel{x}}} \right)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} + \frac{\cancel{x}}{x(1+v)} \left(\frac{v - v^2}{\cancel{x}} \right)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v(1+v) + (v - v^2)}{x(1+v)}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v + \cancel{v^2} + v - \cancel{v^2}}{x(1+v)}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x(1+v)}}$$

Tenemos que resolver

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x(1+v)}$$ → Ecuación de variables separables

$$\frac{(1+v)dv}{v} = \frac{2}{x}dx \quad / \int$$

$$\int \frac{1}{v}dv + \int dv = 2\int \frac{1}{x}dx + C$$

$$\ln(v) + v = 2\ln(x) + C$$ pero $v = x \cdot y$

$$\ln(x \cdot y) + xy = \ln(x^2) + C$$

$$\ln(x) + \ln(y) + xy = \ln(x^2) + C$$

$$\ln(y) = \ln(x) + \cancel{\ln(x)} + C - \cancel{\ln(x)} - xy$$

$$\ln(y) = \ln(x) - xy + C \quad / e^{(\cdot)}$$

$$y = e^{\ln(x)} \cdot e^{-xy} \cdot e^{C} \qquad e^C = M$$

$$y = x \cdot e^{-xy} \cdot M$$

$$\boxed{y(x) = x e^{-xy} \cdot M}$$ solución implícita depende de y.

P1 Considere la EDO

$$y' = F\left(\frac{ax+by+e}{cx+dy+f}\right) \quad \text{con } a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$$

(1) Pruebe que si $ad - cb \neq 0$ esta ecuación puede transformarse en homogénea mediante un cambio de variable del tipo $z = y+\alpha$, $t = x+\beta$, donde α y β son ctes elegidas adecuadamente.

sol:

$Z = y+\alpha \Rightarrow y = z-\alpha$; $t = x+\beta \Rightarrow x = t-\beta$

$z' = y'$

$$z' = F\left(\frac{(t-\beta)a + b(z-\alpha) + e}{(t-\beta)c + d(z-\alpha) + f}\right)$$

$$= F\left(\frac{at + bz - \beta a - \alpha b + e}{ct + dz - \beta c - \alpha d + f}\right)$$

Recordar que una función es homogénea si

$F(\alpha x, \alpha y) = F(x,y)$ ó $f(x,y) = h\left(\frac{y}{x}\right)$

Entonces debo llegar a que

$$z' = F\left(\frac{at+bz}{ct+dz}\right) = F\left(\frac{a + b\frac{z}{t}}{c + d\frac{z}{z}}\right)$$

Entonces

$$\left.\begin{array}{l} -\beta a - \alpha b + e = 0 \\ -\beta c - \alpha d + f = 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Para que tenga solución única $\det(M) \neq 0$

$ad - bc \neq 0$

(2) Aplique este método a la ecuación

$$\cancel{y' = \frac{(x+y+4)}{(x-y-6)}} \quad y' = \frac{(2y+x-1)}{y+2x+1} \qquad y(0)=1$$

usamos el cambio de variable

$u = y+\alpha \Rightarrow y = u-\alpha \;\Big|\; t = x+\beta \Rightarrow x = t-\beta$

$u' = y'$

remplazando en la ecuación

$$u' = \frac{2(u-\alpha)+t-\beta-1}{u-\alpha+2(t-\beta)+1}$$

$$u' = \frac{2u+t-2\alpha-\beta-1}{u+2t-\alpha-2\beta+1}$$

Imponemos que sea homogénea

$$\begin{array}{l} -2\alpha-\beta-1=0 \\ -\alpha-2\beta+1=0 \quad /(-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -\cancel{2\alpha}-\beta-1=0 \\ +\cancel{2\alpha}+4\beta-2=0 \end{array}$$

$3\beta = 3$
$\boxed{\beta = 1}$ $\Rightarrow$ $-\alpha-2+1=0$
$\boxed{\alpha=-1}$

$$u' = \frac{2u+t}{u+2t} = \frac{1+\frac{2u}{t}}{2+\frac{u}{t}}$$

C.V $\quad w = \frac{u}{t}$

$u = wt \;/\frac{d}{dt}$

$\Rightarrow u' = w't + w$

$$\Rightarrow w't + w = \frac{1+2w}{2+w}$$

$$w't = \frac{1+2w}{2+w} - w$$

$$w't = \frac{1+\cancel{2w}-\cancel{2w}-w^2}{2+w}$$

$$w' = \frac{1-w^2}{t(2+w)}$$

Resolvemos por separación de variables

$$\underbrace{\int \frac{2+w}{1-w^2}\,dw}_{I} = \int \frac{1}{t}\,dt + c$$

resolvemos I por fracciones parciales

$$\frac{2+w}{(1-w)(1+w)} = \frac{A}{(1-w)} + \frac{B}{1+w}$$

$$= \frac{A + AW + B - BW}{(1-w)(1+w)}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|} A+B = 2 \\ A-B = 1 \\ \hline \end{array} \qquad 2A = 3 \qquad \boxed{A = \frac{3}{2}} \qquad \frac{3}{2} + B = 2 \qquad \boxed{B = \frac{1}{2}}$$

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{1}{1-w}\,dw + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+w}\,dw$$

$$= -\frac{3}{2}\ln(1-w) + \frac{1}{2}\ln(1+w)$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}\ln(1-w) + \frac{1}{2}\ln(1+w) = \ln t + c \;/\cdot 2$$

$$\ln\left(\frac{1+w}{(1-w)^3}\right) = 2\ln t + A \;/ e^{(\cdot)} \qquad A = 2c$$

$$B = e^A$$

$$\frac{1+w}{(1-w)^3} = t^2 \cdot B$$

Pero $w = \frac{u}{t}$

$$w = \frac{y-1}{x+1}$$

Entonces

$$\frac{1 + \frac{y-1}{x+1}}{\left(1 - \left(\frac{y-1}{x+1}\right)\right)^3} = B(x+1)^2$$

$$\frac{x+\cancel{1}+y-\cancel{1}}{\cancel{(x+1)}} \cdot \frac{1}{\frac{(x+1-y+1)^3}{\cancel{(x+1)^3}}} = B\cancel{(x+1)^2}$$

$$x + y = B(x-y+2)^3$$

$x + y' = B(x - y + 2)^3$

Usando la condición inicial $y(0) = 1$

$0 + 1 = B(0 - 1 + 2)^3$

$\Rightarrow B = 1$

$\Rightarrow x + y = (x - y + 2)^3$