

Solución clase aux # 1

Emilio Vilches G.

Problema # 1.

1. $y' = xy^3$

"método formal": $y' = xy^3$ (*) (regla de la cadena)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y^3} y' = x \quad \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{y^2}{-2} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{2} \right)$$

integrando: $\frac{y^2(x)}{-2} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2$

$$\Leftrightarrow y^2(x) = -x^2 + \tilde{C}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{-x^2 + \tilde{C}}} \quad \text{donde } \tilde{C} \text{ es una cte que se puede calcular imponiendo alguna condición inicial.}$$

"método de diferenciales":

$$y' = xy^3$$

ssi

$$\frac{dy}{dx} = xy^3$$

"ssi"

$$\frac{dy}{y^3} = x dx$$

integrando

$$\frac{y^{-2}(x)}{-2} + C = \frac{x^2}{2} + C \dots$$

obs: el "ssi" se justifica por la regla de la cadena como se puede observar en (*).

De ahora en adelante trabajaremos con el "método de diferencias".

$$2. \quad yy' = x(y^2 + 1) \Leftrightarrow \frac{y dy}{y^2 + 1} = x dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(y^2 + 1)}{2} = \frac{x^2}{2} + C \quad \Leftrightarrow \ln(y^2 + 1) = x^2 + 2C$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 1 = e^{x^2 + 2C} \Rightarrow y(x) = \pm \sqrt{e^{x^2 + 2C} - 1}$$

$$3. \quad (x^2 + 1) \tan(y) y' = x \Leftrightarrow \tan(y) \cdot dy = \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\sin(y)}{\cos y} dy = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\Rightarrow -\ln(|\cos y|) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$\Rightarrow \tilde{C} = \ln(\cos y \cdot \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\Rightarrow |\cos y| \sqrt{x^2 + 1} = e^{\tilde{C}} \Rightarrow |\cos y| = \frac{e^{\tilde{C}}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow y = \arccos\left(\pm \frac{e^{\tilde{C}}}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$4 \quad y' = 4x^3(1+y) \Rightarrow \frac{dy}{1+y} = 4x^3 dx$$

$$\Rightarrow \ln(1+y) = x^4 + C$$

$$|1+y| = e^{x^4+C}$$

$$y(x) = (\pm e^{x^4+C}) - 1$$

Problema A2.

$$1 \quad y' + 2y = x^2 + 2x \quad / \cdot e^{\int 2dx} = e^{2x} \quad \swarrow \text{factor integrante}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}y) = e^{2x}(x^2 + 2x)$$

$$\Rightarrow e^{2x}y(x) = \int e^{2x}(x^2 + 2x)dx + C$$

$$y(x) = e^{-2x} \int e^{2x}(x^2 + 2x)dx + C e^{-2x}$$

$$2. \quad y' - y = 2x e^{x+x^2} \quad / \quad e^{\int -dx} = e^{-x}$$

$$\frac{d}{dx}(y e^{-x}) = 2x e^{x^2}$$

$$\Rightarrow y(x) e^{-x} = \int 2x e^{x^2} dx + C = e^{x^2} + C$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{x^2+x} + C e^x$$

$$3. \quad x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$$

$$\Rightarrow y' + \frac{1}{x(x-1)}y = \frac{x(2x-1)}{x-1} \quad / \quad e^{\int \frac{dx}{x(x-1)}}$$

però

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x} = \ln \left[\frac{x-1}{x} \right]$$

$$\Rightarrow e^{\ln \left(\frac{x-1}{x} \right)} = \frac{x-1}{x}$$

$$\Rightarrow \left(y \cdot \left(\frac{x-1}{x} \right) \right)' = 2x-1$$

$$\Rightarrow y(x) \left(\frac{x-1}{x} \right) = x^2 - x + C$$

$$y(x) = \frac{x}{x-1} \cdot x(x-1) + C \cdot \frac{x}{x-1}$$

$$y(x) = 1 \cdot x^2 + \frac{Cx}{x-1}$$

$$4. \quad y' + y \cos x = \sin x \cos x \quad / \quad e^{\int \cos x dx}$$

$$(y e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cdot \sin x \cos x = e^{\sin x}$$

$$\Rightarrow y(x) e^{\sin x} = \int e^{\sin x} \sin x \cos x dx + C$$

$$\swarrow \quad u = \sin x$$

$$= \int e^u u du + C$$

$$= u \cdot e^u - e^u + C = \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + C$$

$\Rightarrow$

$$y(x) = \sin x - 1 + C e^{-\sin x}$$

Problema # 3

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

$$y(0) = 1$$

Como $y(0) = 1$ por continuidad podemos suponer
que $y(x) > 0$ para $x \in (0, \delta)$ para algún δ
así vamos a suponer que $y > 0$.

$$\Rightarrow y' = \frac{-x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \quad (*)$$

$$\text{Sea } z = \frac{x}{y} \Leftrightarrow yz = x \Leftrightarrow y'z + yz' = 1$$

$$\downarrow y = x/z$$

$$\Rightarrow y'z + \frac{x}{z} z' = 1 \Leftrightarrow y'z = 1 - \frac{x}{z} z'$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{1}{z} - \frac{x}{z^2} z', \text{ reemplazando en } (*)$$

$$\frac{1}{z} - \frac{x}{z^2} z' = -z + \sqrt{z^2 + 1}$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{z^2} z' = -z - \frac{1}{z} + \sqrt{z^2 + 1}$$

$$\Rightarrow xz' = z^2 \left(z + \frac{1}{z} - \sqrt{z^2+1} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z^2 \left(z + \frac{1}{z} - \sqrt{z^2+1} \right)} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z(z^2+1 - z\sqrt{z^2+1})} = \frac{dz(z^2+1 + z\sqrt{z^2+1})}{z(z^4+2z^2+1 - z^2(z^2+1))}$$

$$= \frac{dz}{z} \frac{(z^2+1 + z\sqrt{z^2+1})}{(z^2+1)} = \frac{dz}{z} + \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z} + \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \frac{dx}{x} \quad \int \int$$

$$\ln|z| + \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \ln|x| + C$$

Calculus $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}$: Sea $z = \tan \theta$
 $dz = \sec^2 \theta d\theta$

$$= \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec \theta} = \int \sec \theta d\theta = \ln(\sec \theta + \tan \theta) + C$$

pero $z = \tan \theta \Rightarrow \sqrt{z^2+1} = \sec \theta$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \ln(\sqrt{z^2+1} + z) + C$$

y por lo tanto,

$$\ln|z| + \ln(\sqrt{z^2+1} + z) = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \ln|z|(\sqrt{z^2+1} + z) = \ln(e^C|x|)$$

$$\Rightarrow |z|(\sqrt{z^2+1} + z) = e^C|x|$$

reemplazando $z = x/y$

$$\frac{|x|}{y} \left(\sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1} + \frac{x}{y} \right) = e^C|x|$$

sin perdida de generalidad resolvemos para $x \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1} + \frac{x}{y} = e^C$$

Ahora imponemos la condición inicial

$$y(x=0) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1} \sqrt{0+1} + 0 = e^C \quad \Rightarrow \quad e^C = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{y} \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1} + \frac{x}{y} = 1}$$

es la relación que satisface la EDO.

Problema # 4.

$$y' = f(ax + by + c)$$

• si $a = 0$ $y' = f(by + c)$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{f(by+c)} = \int dx = x + c$$

se se pueden separar variables

• si $b = 0$ $y' = f(ax + c) \Leftrightarrow y = \int f(ax+c) dx + c$

• si $b \neq 0$ sea $z = ax + by + c$
 $\frac{dz}{dx} = a + by'$ $\Rightarrow \frac{z' - a}{b} = y'$

$$\Rightarrow \frac{z' - a}{b} = f(z)$$

$$\Rightarrow z' = a + bf(z) \Leftrightarrow \int \frac{dz}{a + bf(z)} = \int dx$$

se se pueden separar variables