Guía 1: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Profesor de Cátedra: A. Felipe Macias Araya
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Nicolás Hernández
Domingo 09 de Mayo de 2010

Esta guía pretende explicar como resolver una ecuación diferencial ordinaria, lineal, no homogénea, a coeficientes variables y de orden 2. Además algunos problemas de preparación para el control 2

I. Ecuación de orden 2, a coeficientes variables, no homogénea

Recordemos que en una EDO de orden superior a coeficientes variables, no hay un método general para encontrar alguna solución de la ecuación homogénea. Sin embargo en el caso de las ecuaciones de orden 2, si es que conocemos una solución de la ecuación homogénea de alguna forma (ya sea por simple inspección, por suerte, o porque un oráculo nos haya dicho una solución que podamos comprobar que resuelve la ecuación homogénea), gracias a la fórmula de Abel podemos conocer otra solución que sea linealmente independiente con la primera.
La fórmula de Abel dice que si y_1 es una solución de la ecuación $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, entonces si llamamos y_2 a la solución de la siguiente EDO lineal de orden 1:

$$y'y_1 - y_1'y = C \cdot \exp\left(-\int a_1(x)dx\right)$$

se tendrá que y_2 es una solución linealmente independiente de y_1 de la ecuación $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$.

Una vez que tenemos dos soluciones linealmente independientes de la solución homogénea, que llamamos y_1 e y_2, podemos encontrar una solución particular de la ecuación $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = Q(x)$ a través de la fórmula de Green:

$$y_p(x) = \int_0^x \frac{Q(t) \cdot \big(y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)\big)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)} dt$$

Finalmente, una solución general de la ecuación $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = Q(x)$ será:

$$y(x) = y_p(x) + k_1y_1(x) + k_2y_2(x)$$

donde k_1, k_2 son números reales cualquiera (es decir, para cada par de reales k_1, k_2 obtenemos una solución distinta de la EDO, y además todas las soluciones de la EDO son de esta forma).

P1. Resuelva la ecuación:

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 1 - x$$

Sabiendo que $y_1(x) = e^x$ es una solución de la ecuación homogénea.

Sol.

Empezamos calculando una segunda solución de la ecuación homogénea con la fórmula de Abel. Esta solución, a la cual llamaremos y_2 deberá resolver la siguiente EDO (la cual no es difícil de resolver pues es de orden 1):

$$\begin{array}{rrcl}
 & e^x y'(x) - e^x y(x) & = & C \cdot \exp\left(-\int -\dfrac{x}{x-1}dx\right) \\
\Longrightarrow & e^x y'(x) - e^x y(x) & = & C \cdot \exp\big(x + \ln(x-1)\big) \\
\Longrightarrow & e^x y'(x) - e^x y(x) & = & Ce^x(x-1) \\
\Longrightarrow & y'(x) - y(x) & = & C(x-1) \\
\Longrightarrow & e^{-x} y'(x) - e^{-x} y(x) & = & Ce^{-x}(x-1) \\
\Longrightarrow & \big(e^{-x}y(x)\big)' & = & Ce^{-x}(x-1) \\
\Longrightarrow & e^{-x}y(x) & = & C\displaystyle\int e^{-x}(x-1)dx \\
\Longrightarrow & e^{-x}y(x) & = & C\big(xe^{-x} + K\big) \\
\Longrightarrow & y(x) & = & Cx + \mathcal{K}e^x
\end{array}$$

Como en general podríamos tomarnos cualquier par de constantes $C, \mathcal{K}$ mientras se tenga que $C \neq 0$, por simplicidad nos tomamos $C = 1,\ \mathcal{K} = 0$.
Así, tendremos que las soluciones de la ecuación homogénea serán:

$$y_1(x) = e^x$$

$$y_2(x) = x$$

Procedemos ahora a calcular una solución particular de la EDO usando la fórmula de Green:

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \int_0^x \frac{(1-t)(e^t x - e^x t)}{e^t - te^t}dt \\
&= \int_0^x \frac{e^t x - e^x t}{e^t}dt \\
&= x\int_0^x dt - e^x \int_0^x te^{-t}dt \\
&= x^2 - e^x\big(-te^{-t} - e^{-t}\big)\Big|_{t=0}^{t=x} \\
&= x^2 + 1 + \underbrace{x - e^x}_{\text{comb. lineal de } y_1 \text{ e } y_2}
\end{aligned}$$

Así, la solución general de la EDO es:

$$y(x) = x^2 + 1 + k_1 e^x + k_2 x \qquad\qquad \text{con } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

II. Problemas Propuestos

P1. Probar que efectivamente la solución y_2 de la ecuación homogénea, dada por el método de este texto, es linealmente independiente con y_1.
INDICACIÓN: *Exprese y_2 en función de y_1 y luego calcule el wronskiano de estas funciones.*

P2. Hallar la solución general de cada una de estas ecuaciones

(a) $(x^2-1)y''-2xy'+2y=(x^2-1)^2$;

(b) $(x^2+x)y''+(2-x^2)y'-(2+x)y=x(x+1)^2$;

(c) $(1-x)y''+xy'-y=(1-x)^2$;

(d) $xy''-(1+x)y'+y=x^2e^{2x}$;

(e) $x^2y''-2xy'+2y=xe^{-x}$. NOTA: *La integral $\int \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ que aparece en la solución particular es una función no elemental, por lo que no debe calcularla.*

P3. Probar que la solución general de la ecuación $y''+py'+qy=0$ tiende a 0 cuando $x\to\infty$ si y sólo si p y q son ambos positivos.

P4. Consideremos las dos funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=x^2\,|x|$ sobre el intervalo $[-1,1]$.

(a) Probar que su wronskiano $W(f,g)$ se anula idénticamente.

(b) Probar que f y g no son linealmente dependientes.

P5. Es claro que $\sin x, \cos x$ y $\sin x, \sin x-\cos x$ son dos pares diferentes de soluciones linealmente independientes de $y''+y=0$. Así pues, si y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0,$$

vemos que *no* vienen unívocamente determinadas por la ecuación.

(a) Demostrar que

$$P(x)=-\frac{y_1y_2''-y_2y_1''}{W(y_1,y_2)}$$

y

$$Q(x)=\frac{y_1'y_2''-y_2'y_1''}{W(y_1,y_2)},$$

de manera que la ecuación *sí* está unívocamente determinada por cualquier par de soluciones linealmente independientes.

(b) Usar (a) para reconstruir la ecuación $y''+y=0$ de cada uno de los pares de soluciones antes citados.

(c) Usar (a) para reconstruir la ecuación $y''-4y'+4y=0$ a partir de las soluciones linealmente independientes e^{2x}, xe^{2x}.

P6.

(a) Probar que aplicando la sustitución $y=uv$ a la ecuación homogénea $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ es posible obtener una ecuación homogénea lineal de segundo orden para v en la que no aparece v'. Hallar u y la ecuación para v en términos de los coeficientes originales $P(x)$ y $Q(x)$.

(b) Usar el método de la parte (a) para hallar la solución general de $y''+2xy'+(1+x^2)y=0$.