Auxiliar 1: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Profesor de Cátedra: A. Felipe Macias Araya
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Nicolás Hernández
Viernes 09 de Abril de 2010

P1. Encuentre la familia de soluciones de las siguientes ecuaciones:

(a) $(1+x^2)y' = \arctan(x)$,
(b) $y' = e^x \cos(x)$,
(c) $y' = y$,
(d) $y' = xy^3$,
(e) $y' = 2^{x+y}$,
(f) $yy' = x(y^2+1)$,
(g) $yy' - x = xy^2$,
(h) $(x^2+1)\tan(y)y' = x$,
(i) $(1+\sqrt{y})y' = 1+\sqrt{x}$,
(j) $y' = 4x^3(1+y)$.

P2. Encuentre la solución a los siguientes problemas de valor inicial:

(a) $y' = ye^x; \quad y(0) = 2e$,
(b) $y' = 2xy^2 + 3x^2y^2; \quad y(1) = 1$,
(c) $y' = 3x^2(y^2+1); \quad y(0) = 1$,
(d) $2yy' = x(x^2-16)^{-1/2}; \quad y(5) = 2$ [HINT: $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$],
(e) $y' + 1 = 2y; \quad y(x_0) = y_0$,
(f) $xy' - y = 2x^2y; \quad y(1) = 1$,

P3. La ley de enfriamiento de Newton establece que la *tasa de pérdida* de calor desde la superficie de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el medio que lo rodea y su superficie, con constante de proporcionalidad $k > 0$. Sean $S(t)$ y T_0 las temperaturas de la superficie del objeto y del medio respectivamente (la del medio se supone constante para simplificar).

(a) Encuentre una ecuación diferencial para $S(t)$ y resuélvala con condición inicial $S(t_0) = S_0 > T_0$.
(b) Pruebe que si además se sabe que $S(t_1) = S_1$ para $t_1 > t_0$ entonces la constante de proporcionalidad está dada por

$$k = \frac{1}{t_1 - t_0} \ln\left(\frac{S_0 - T_0}{S_1 - T_1}\right).$$

NOTA: esta fórmula permite calibrar el modelo, es decir, determinar k utilizando mediciones experimentales de temperaturas.

(c) Un objeto a una temperatura de 40°C se coloca en una habitación a 20°C. Si en 10 minutos se enfría a 30°C, ¿Cuál es la temperatura del objeto al cabo de 20 minutos?