MA2601-1 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2010-01.

Profesor: Raúl Manasevich. Auxiliares: Bastián Bahamondes y Alfredo Torrico.

Clase Auxiliar Extra

12 Abril de 2010

P1. Resuelva las siguientes Ecuaciones de Bernoulli o de Ricatti:

a) $xy^2y' + y^3 = x \cos(x)$

b) Muestre que con un cambio de variables adecuado la EDO:

$$e^{-x^2}y' = 1 + 2(x-1)e^{-x^2}y + e^{-2x^2}y^2$$

es de tipo Ricatti con coeficientes constantes y resuelva.

P2. Resuelva las siguientes EDO's:

a) $y^{(iv)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$

b) $4x^2y'' + 8xy' + y = 0$ en $(0, +\infty)$; $x = e^u$; $z(u) = y(e^u)$.

P3. a) Considere la ecuación

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \text{ en } \mathbb{R}$$

con $a_1, a_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y periódicas de período T . Suponga que $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de la ecuación y satisface $y(0) = y(T)$ $y'(0) = y'(T)$. Demuestre que y es periódica.

b) Sean u y v funciones positivas tal que

$$u'' + a(t)u = 0$$

$$v'' + b(t)v = 0$$

con $a(t) > b(t) \forall t > 0$, $u(0) = v(0)$, $u'(0) = v'(0)$. Demuestre que $u(t) > v(t) \forall t > 0$.

P4. Dos sustancias A y B serán transformadas en un solo compuesto C. Se cumple que “el aumento en la cantidad x del compuesto C es proporcional al producto de las cantidades de sustancia A y B no transformadas aún”. Suponga que para formar una unidad de compuesto C se necesita de una unidad de A y una unidad de B. Suponga que en $t = 0$ hay a unidades de A, b unidades de B y ninguna de C.

a) Escriba una ley de transformación (EDO) justificando cada uno de sus términos.

b) Resuelva la EDO con las condiciones iniciales dadas.

c) Suponga que $k > 0$. Investigue el comportamiento de x cuando $t \rightarrow \infty$.

P5. Una estrella esferoidal de radio $a > 0$ está compuesta por un fluido compresible cuya presión $p(r)$ y densidad $\rho(r)$ son funciones radiales ($0 \leq r \leq a$) tales que $p = k\rho^2$ con k constante positiva. Si $g(r)$ es la gravedad a una distancia r del centro de la esfera, entonces un balance de momentos y la ley de gravitación nos dan las relaciones:

$$p' = -g(r)\rho(r), \quad r^2g(r) = 4\pi G \int_0^r s^2\rho(s)ds$$

donde G es la constante de gravitación universal y las derivadas están tomadas con respecto a r .

(i) Deducir que ρ satisface la ecuación diferencial:

$$r\rho'' + 2\rho' + \alpha^2 r\rho = 0, \quad \alpha = \frac{2\pi G}{k}.$$

(ii) Determine $\rho(r)$ en términos de $\rho(0)$, la densidad del núcleo estelar.

(**HINT:** Resuelva para $r\rho$. Note que $\rho(r)$ debe ser positiva y finita si $r \rightarrow 0$),

(iii) Explique por qué este modelo predice estrellas de máximo tamaño $a = \frac{\pi}{\alpha}$.