Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar 11 - MA2002 Sección 2
Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Series de Laurent, Integrales reales usando complejos
Prof. Cátedra: Jaime Gonzalez E.
Prof. Auxiliares: Nicolás Riquelme C. - Sergio Castillo J.
Fecha: 31 de Mayo del 2010

P1.- Determine la serie de Laurent en torno a $z_0 = 1$ para

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)}$$

R: Primero transformamos, en fracciones parciales, quedando

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{i}{z^2} - \frac{1}{z-i}$$

Trabajando por partes tenemos
a) $f_1(z) = \frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)\left(1+\frac{1}{z-1}\right)} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-n-1}$$

La cual converge si $|z-1| > 1$
b) $f_2(z) = \frac{1}{z^2}$
Para hacer esto primero démonos cuenta que

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}$$

Luego, derivando lo anterior, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)(z-1)^{-n-2}$$

La cual converge si $|z-1| > 1$
c) $f_3(z) = \frac{1}{z-i}$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{(1-i)\left(1+\frac{z-1}{1-i}\right)} = \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{1-i}\right)^n$$

La cual converge si $|z-1| < \sqrt{2}$

Finalmente, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) (z-1)^{-n-2} - \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{1-i}\right)^n$$

La cual converge si $1 < |z-1| < \sqrt{2}$

P2.-
a) Transforme la integral

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta) d\theta$$

En una de la forma

$$\int_{|z|=1} g(z) dz$$

R: Consideremos la siguiente curva $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, la cual está parametrizada por la función $\sigma(\theta) = e^{i\theta} \quad \theta \in [0, 2\pi)$. Notemos que

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Por ende, y dado que en la parametrización se recorren los $z = e^{i\theta}$, esto implica que

$$\cos\theta = \frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

y como la parametrizacion es $\sigma(\theta) = e^{i\theta}$, se tiene que $\sigma{\acute{}}(\theta) = ie^{i\theta} = iz$. Así, gracias a estas asociaciones podemos escribir la integral en una funcion de z

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) d\theta$$

Pero como $dz = ie^{i\theta} d\theta$, se hace aparecer este resultado

$$\int_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) \frac{ie^{i\theta}}{ie^{i\theta}} d\theta$$

Con esto, se tiene, recordando que $z = e^{i\theta}$, se tiene que

$$\int_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) \frac{ie^{i\theta}}{ie^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

Por lo cual, definiendo $g(z) = f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)\frac{1}{iz}$, se consigue lo que queremos

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta)d\theta = \int_{|z|=1} g(z)dz$$

b) Calcule, usando lo anterior

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{25 - 24\cos\theta}$$

R: Basta hacer el cambio que está indicado en la parte anterior

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{25 - 24\cos\theta} = \int_{|z|=1} \frac{1}{25 - 12\left(z + z^{-1}\right)} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{1}{25z - 12z^2 + 12} \cdot \frac{dz}{i}$$

Finalmente esta integral la resolvemos usando residuos, para lo cual encontramos los polos resolviendo la ecuación de segundo grado

$$-12z^2 + 25z + 12 = 0$$

De la cual las soluciones son $z_1 = \frac{4}{3}$ y $z_2 = \frac{3}{4}$, y dado que solo z_2 está dentro de la región interna cuyo borde es $|z| = 1$, se tiene que

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{25z - 12z^2 + 12} \cdot \frac{dz}{i} = 2\pi i \text{Res}(g, z_2 = \frac{3}{4}) = \frac{2\pi}{7}$$

Así, se tiene que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{25 - 24\cos\theta} = \frac{2\pi}{7}$$

P3.- Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x^3 + x} dx$$

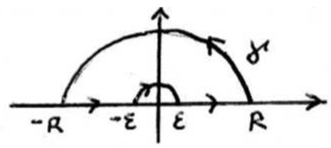
R: Esta es una integral del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \text{sen}(x) dx$$

Donde $p(x) = 1$, $q(x) = x^3 - x$ y su calculo se realiza mediante la integral compleja

$$\int_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)} e^{iz} dz$$

Donde γ corresponde al contorno de la figura siguiente



Así, y dado que se cumplen las condiciones: grado$(p) \leq$ grado$(q) + 1$, y que $\exists M > 0$ tal que $\left|\frac{p(z)}{q(z)}e^{iz}\right| \leq M$ para $z : |z| = R$, se tiene entonces que

$$\int\limits_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)} e^{iz} dz = 2\pi i \text{Res}(f, z = i) + \pi i \text{Res}(f, z = 0)$$

Dado que existe la prescencia de un polo real simple $z = 0$, y dado que dentro de la figura formada por γ solo se encuentra el polo $z = i$ y no el polo $z = -i$. Así, notemos primero que grado$(p) = 0 \leq$ grado$(q) + 1 = 3$. Falta por ende demostrar lo segundo, lo que es verificable ya que

$$\left|\frac{1}{z(z^2+1)}e^{iz}\right| = \frac{1}{|z|}\frac{\left|e^{iz}\right|}{|z^2+1|} = \frac{1}{R}\frac{\left|e^{i(R\cos\theta + iR\text{sen}\theta)}\right|}{|z^2+1|} = \frac{1}{R}\frac{\left|e^{iR\cos\theta - R\text{sen}\theta}\right|}{|z^2+1|}$$

$$= \frac{1}{R}\frac{\left|e^{iR\cos\theta}\right|\left|e^{-R\text{sen}\theta}\right|}{|z^2+1|} = \frac{1}{R}\frac{\left|e^{-R\text{sen}\theta}\right|}{|z^2+1|} = \frac{1}{R}\frac{e^{-R\text{sen}\theta}}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{R}\frac{e^{-R\text{sen}\theta}}{R^2} =\leq \frac{1}{R^3} = M$$

Lo que es posible notando que $\left|e^{iR\cos\theta}\right| = 1$, $\frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{z^2}$, y que $e^{-R\text{sen}\theta} \leq 1$
Con esto, todo se reduce al cálculo de los residuos, con lo que se tiene que

$$\int\limits_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)} e^{iz} dz = 2\pi i(-\frac{1}{2e}) + \pi i \text{Res}(1) = \pi i\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

Así, y dado que

$$\int\limits_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)} e^{iz} dz = \int\limits_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)} \cos(z) dz + i\int\limits_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)} \text{sen}(z) dz = \pi i\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

Se concluye que

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x^3 - x} dx = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right) \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^3 - x} dx = 0$$