Auxiliar 4 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Lunes 19 de Abril 2010

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega - Rodrigo Lecaros
Profesores Auxiliares: Pía Francisca Leyton - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Sea Γ una curva simple, cerrada y regular por trozos contenida en el plano XY. Suponga que Γ está parametrizada en coordenadas polares:

$$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta, \quad y(\theta) = r(\theta)\sin\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

donde $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ es $\mathcal{C}^1$ y periódica. Sea Ω la región encerrada por Γ. Demuestre que:

$$A(\Omega) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\theta)^2 d\theta$$

Pregunta 2. Calcule el gradiente de:

$$f(x, y, z) = \frac{\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Pregunta 3.

a) Dados $\vec{F} \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $g \in \mathcal{C}^1$ pruebe la identidad:

$$div(g\vec{F}) = \nabla g \cdot \vec{F} + g div(\vec{F})$$

Muestre que para todo $f, g \in \mathcal{C}^2(\Omega')$ con $\Omega \cup \partial\Omega \subset \Omega'$ se tiene la identidad de Green:

$$\iiint_\Omega (g\Delta f + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \iint_{\partial\Omega} g\nabla f \cdot d\vec{S}$$

b) Sea S la superficie del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, que se encuentra en la región $z \geq 1$ y que se orienta según la normal superior (exterior a la esfera). Calcule el flujo de $\nabla \times \vec{F}$ a través de S donde $\vec{F}(x, y, z) = (e^z - x^2 y)\hat{i} + (z + xy^2)\hat{j} + y^2\sqrt{1 + z^4}\hat{k}$

Pregunta 4. Se define el campo eléctrico generado por una carga Q como $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3}$.

a) Calcule el flujo de campo eléctrico generado por una carga Q en el orígen, a través del manto del cilindro de ecuación: $x^2 + y^2 = a^2$ con $a > 0$

a) Generalicemos el resultado anterior, sea Ω una región simple sólida en $\mathbb{R}^3$ y S su frontera. Demuestre que:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{si } (0,0,0) \notin \Omega \\ \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{si } (0,0,0) \in \Omega \end{cases}$$

Este resultado se conoce como el Teorema de Gauss.

Pregunta 5. La presión a una profundidad h en un estanque es $p(h) = p_0 + \rho_0 g h$ con ρ_0 la densidad del líquido, p_0 la presión atmosférica y g la aceleración de gravedad. La fuerza neta experimentada por un cuerpo Ω sumergido en el líquido viene dada por:

$$\vec{F} = \iint_{\partial\Omega} p\hat{n} dS$$

Calcule $\vec{F} \cdot \hat{e}$ para $\hat{e} = \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ y deduzca el *Principio de Arquímides*:

$$\vec{F} = \rho_0 g \mathrm{Vol}(\Omega) \hat{k}$$

Pregunta 6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo por caminos de frontera regular $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Considere la ecuación del calor en régimen estacionario con condiciones de borde mixtas:

$$(ECM) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = T_0 & \text{sobre } \Sigma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = -\alpha u & \text{sobre } \Sigma_2 \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$ y $T_0 \geq 0$ son constantes conocidas.

a) Pruebe que en el caso $T_0 = 0$ se tiene $u \equiv 0$ en todo Ω.
<u>Indicación</u>: Pruebe que en este caso se tiene:

$$\iiint_\Omega ||\nabla u||^2 dV + \alpha \iint_{\Sigma_2} u^2 dA = 0$$

b) Deduzca que la ecuación (ECM) posee a lo más una solución.

c) Resuelva (ECM) para el caso $\Omega = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : \ a < ||\vec{r}|| < b\}$ con $0 < a < b$, $\Sigma_1 = S(0, a)$, $\Sigma_2 = S(0, b)$
<u>Indicación</u>: Suponga que la solución tiene simetría esférica.