Auxiliar 11: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Juan Dávila
Auxiliares: Benjamín Palacios - Mauro Escobar
15 de junio de 2010

P1. Minimice la función $f(x,y,z) = xy + z^2$ sujeta a las restricciones

$$y - x = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

P2. (i) Considere la función $f(x,y) = x^2 + y^2$.
Encuentre los puntos en que f alcanza sus valores máximo y mínimo (globales) sobre la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(ii) Considere la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}xy$.
Encuentre los puntos en que f alcanza sus valores máximo y mínimo (globales) sobre la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

P3. Muestre que $\frac{n!}{n^{\frac{n}{2}}}$ es el máximo valor, en $\mathbb{R}^n$, de la función:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i, \qquad \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{i^2} = 1.$$

P4. (i) Encuentre el valor de la distancia mínima en $\mathbb{R}^2$ entre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ y la recta $x + y = 4$.

(ii) Una caja rectangular sin tapa debe tener una superficie de $32m^2$. Encuentre las dimensiones de la caja de modo tal que el volumen que encierra sea máximo.

P5. Sea A una matriz de $n \times n$ simétrica con coeficientes reales.

(i) Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^t A x$. Verifique que $\nabla f(x) = 2(Ax)^t$.

(ii) Sea v_1 una solución de problema de minimización

$$\min_{\|x\|^2=1} x^t A x.$$

Pruebe que v_1 es vector propio de A.

(ii) Sea v_2 una solución del problema de minimización

$$\min_{\|x\|^2=1,\ x\cdot v_1=0} x^t A x,$$

donde v_1 es el vector de la parte anterior. Pruebe que v_2 es vector propio de A.

(iv) Considere v_1, v_2 como en las partes anteriores. Se define $v_3, \ldots, v_n$ por recurrencia: dados $v_1, \ldots, v_k$ sea v_{k+1} una solución del problema

$$\min_{\|x\|^2=1,\ x\cdot v_1=0,\ \ldots,\ x\cdot v_k=0} x^t A x.$$

Demuestre que $v_3, \ldots, v_n$ son vectores propios de A. Deduzca que A es diagonalizable.