

AUXILIAR 8: CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: JUAN DÁVILA

AUXILIARES: BENJAMÍN PALACIOS - MAURO ESCOBAR

24 DE MAYO DE 2010

- P1.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donde $g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z))$ con $g_1(x, y, z) = \|(x, y, z)\|^2$ y $g_2(x, y, z) = x + y + z$. Sea $h = f \circ g$. Pruebe que:

$$\|\nabla h\|^2 = 4 \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 g_1 + 4 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} g_2 + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2.$$

- P2.** Sea $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciables. Se define el Laplaciano de f como:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Y la ecuación de Laplace:

$$\Delta f = 0.$$

Suponga que $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, función dos veces diferenciable, satisface la ecuación de Laplace. Pruebe que $v(s, t) = u(st, \frac{1}{2}(s^2 - t^2))$ también satisface la ecuación de Laplace.

- P3.** Sea $F(x, y) = f(x, g(x)k(y), h(x, y))$.

Encuentre una expresión en términos de las derivadas parciales de f, g, k y h para $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

- P4.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Definamos la función $h : \mathbb{R}_*^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg\left(\frac{y}{x}\right))$$

donde $\mathbb{R}_*^2 = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$. Calcule $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y)$ en término de las derivadas parciales de la función f y demuestre que si denotamos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial r} = \partial_1 f, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = \partial_2 f$$

entonces la expresión anterior toma la forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(r, \theta).$$

- P5.** (i) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 de la función

$$f(x, y) = \sin^2(x + y) + x^2 y$$

en torno de $(0, 0)$.

- (ii) Muestre que f es de clase $\mathcal{C}^3$ y pruebe que

$$|f(h_1, h_2) - T_2(h_1, h_2)| \leq \frac{40}{3} \|(h_1, h_2)\|^3$$

donde T_2 es el polinomio de Taylor de orden 2 de f en torno de $(0, 0)$.