Auxiliar 7: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Juan Dávila
Auxiliares: Benjamín Palacios - Mauro Escobar
11 de mayo de 2010

P1. Regla de la Cadena

(i) Si u, v y w son funciones de (x, y, z) definidas por:

$$u = e^x \cos y, \qquad v = e^x \sin y, \qquad w = x + y + z$$

Hallar el Jacobiano de (u, v, w) respecto al cambio de variables en coordenadas esféricas r, θ y φ, a saber:

$$x = r \cos\varphi \sin\theta, \qquad y = r \sin\varphi \sin\theta, \qquad z = r \cos\theta.$$

(ii) Sean las funciones de clase C^1, $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $l : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y sea:

$$m(x, y) = f(\ g(x, y^2)\ ,\ h(xy) + g(y, x)\ ,\ l(h(yx^2))\ ).$$

Calcular $\frac{\partial m}{\partial x}$ y $\frac{\partial m}{\partial y}$, explicitando su desarrollo tanto como pueda.

P2. Teorema de la Función Inversa

(i) Considere $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(x, y) = (x^3 - 3xy^2,\ -y^3 + 3x^2y).$$

Pruebe que para todo $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ existe $\delta > 0$ tal que f posee inversa local en $B((x_0, y_0), \delta)$. Encuentre un valor aproximado de $f^{-1}(1.1\ ,\ 0.1)$ para el caso $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

(ii) Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$g(u, v) = (u^2 + u^2v + 10v,\ u + v^3).$$

Pruebe que, restringida a una vecindad del punto $(1, 1)$, g posee una inversa diferenciable. Calcule la derivada de esta inversa en $g(1, 1)$ y úsela para calcular un valor aproximado de una solución del sistema:

$$\begin{aligned} u^2 + u^2v + 10v &= 11,8 \\ u + v^3 &= 2,2 \end{aligned}$$

P3. Teorema de la Función Implícita

Pruebe que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} e^u + xy^2 + v &= 2 \\ \sin u + x^2y + v^3 &= 1, \end{aligned}$$

define a u y v como funciones implícitas diferenciables de las variables x e y en una vecindad de $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 2, 0, 1)$. Sean $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ las funciones implícitas cuya existencia ya se ha probado. Calcule:

$$u(0,2), \qquad v(0,2), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,2), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(0,2), \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(0,2) \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0,2).$$