Auxiliar 5: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Juan Dávila
Auxiliares: Benjamín Palacios - Mauro Escobar
27 de abril de 2010

P1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \log(|x-y|) & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

(i) Justifique que el dominio de f es $\mathbb{R}^2$ y demuestre que el conjunto en que f es continua es $C = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.

(ii) Calcule las derivadas parciales de f y demuestre que f es diferenciable en C.

P2. Sea

$$T : (0,+\infty) \times (-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$$
$$T(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

Mostrar que T es biyectiva en los conjuntos definidos. Encontrar T' (la matriz Jacobiana de T) y calcular su determinante.

P3. Calcular, para los siguientes casos, la dirección de máximo crecimiento en $(1,1,1)$:

(i) $f(x,y,z) = xy + yz + xz^3$

(ii) $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

P4. Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\sin^2 x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Demuestre que f es continua en $(0,0)$ y que las derivadas direccionales $f'((0,0);e)$, con e cualquier vector unitario, existen. Calcule las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

(ii) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$? Justifique claramente su respuesta.