

# AUXILIAR 3: CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: JUAN DÁVILA

AUXILIARES: BENJAMÍN PALACIOS - MAURO ESCOBAR

13 DE ABRIL DE 2010

**P1.** Considere

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\},$$
$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Para  $\lambda \in \mathbb{R}$  se define:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - \lambda & \text{si } (x, y) \in D_1 \\ 0 & \text{si } (x, y) \in D_2 \end{cases}$$

- (i) Encuentre  $\lambda$  tal que  $f$  sea continua en  $D_1 \cup D_2$ . De ahora en adelante, se considera dicho valor de  $\lambda$ .
- (ii) Pruebe que el grafo de  $f$ :

$$\text{Gr}(f) := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_1 \cup D_2\} \text{ es cerrado y acotado.}$$

- (iii) Pruebe que dado cualquier  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  existe un punto en el grafo de  $f$  que minimiza la distancia a  $(x_0, y_0, z_0)$ .

**P2.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|x|+|y|} e^{-\frac{1}{|x|}} e^{|y|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (i) Demuestre que  $f$  es una función continua.
- (ii) Demuestre que  $f$  alcanza su mínimo.

**P3.** Considere la función  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^6}{\|(x, y)\|} & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0 \end{cases}$$

- (i) Demuestre que  $f$  es una función continua.
- (ii) Demuestre que  $f$  alcanza su mínimo.

**P4.** Encuentre la linealización de  $f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$  en el punto  $(3, 2)$ .

**P5.** Considere

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\vec{x} \longrightarrow f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2^2}.$$

Calcule el Jacobiano de  $f$ .