

AUXILIAR 1: CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: JUAN DÁVILA

AUXILIARES: BENJAMÍN PALACIOS - MAURO ESCOBAR

30 DE MARZO DE 2010

P1. Para los siguientes conjuntos, determine interior, adherencia y frontera:

- (i) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2, x_1 > 0\}$.
- (ii) $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{Q}\}$.
- (iii) $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 \geq 0, x_2 \leq \frac{1}{x_1}\}$.

P2. Probar que

- (i) $\text{adh}(A) = \bigcap_{C \supset A, C \text{ cerrado}} C$.
- (ii) $\text{int}(A) = \bigcup_{B \subset A, B \text{ abierto}} B$.

P3. Dados $A, B \subset \mathbb{R}^N$ demuestre que

- (i) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.
- (ii) $\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$, y dé un ejemplo donde no haya igualdad.
- (iii) $\text{adh}(A \cup B) = \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)$.
- (iv) $\text{adh}(A \cap B) \subset \text{adh}(A) \cap \text{adh}(B)$, y dé un ejemplo donde no haya igualdad.

P4. Sea $x \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$. Considere la bola abierta centrada en x de radio r

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^N \mid \|x - y\| < r\}.$$

Demuestre que $B(x, r)$ es efectivamente un conjunto abierto.

P5. Demuestre que:

- (i) Si A es cerrado y B es compacto, entonces $A \cap B$ es compacto.
- (ii) Si $A_1, \dots, A_n$ son compactos, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es compacto.

Def: [*Conjunto Compacto*]

Se dice que un conjunto es *compacto* cuando éste es cerrado y acotado.

(A se dice *acotado* si $\exists M > 0$ tal que $\|x\| \leq M, \forall x \in A$)

Def. [Norma]

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una *norma* en V es una función $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ que satisface las siguientes propiedades:

- $\forall x \in V, \|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- $\forall x, y \in V \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espacio vectorial V dotado de una norma se denomina *espacio vectorial normado* (*e.v.n.*) y se denota $(V, \|\cdot\|)$.

P6. Sea E el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a n . En E se define la función

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{por} \quad \|p\| = \int_0^1 |p'(t)| dt + |p(0)|$$

- (i) Demuestre que $\|\cdot\|$ es una norma en E .
- (ii) Encuentre $L \in \mathbb{R}$ tal que $\forall p \in E, \|p\| \leq L \cdot \left(\max_{i \in \{0,1,\dots,n\}} |a_i| \right)$, donde $p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$.
- (iii) Sea $M = \{\lambda p \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ donde $p(t) = 1 + t + t^2 + \dots + t^n$. Determine $M \cap B_{\|\cdot\|}(0, 1)$.

P7. Considere el espacio de las matrices $\mathcal{M}^{N \times N}(\mathbb{R})$ de tamaño $N \times N$.

- (i) Pruebe que la función $\|\cdot\| : \mathcal{M}^{N \times N} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^N \setminus \{\vec{0}\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2},$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma euclidea en $\mathbb{R}^N$, es una norma en $\mathcal{M}^{N \times N}$.

- (ii) Sea $A \in \mathcal{M}^{N \times N}$, demuestre que

$$e^A := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$$

existe en $\mathcal{M}^{N \times N}$.