

Pauta P2 Control 3

a) La región de integración está dada por

$$S = \{x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + z^2 \leq a^2\}$$

$$\text{Es decir } -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y, z \leq \sqrt{a^2 - x^2} \\ -a \leq x \leq a$$

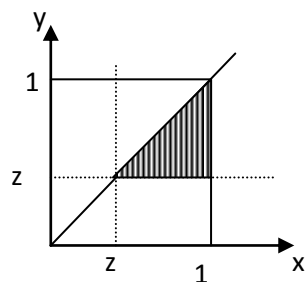
Así, el volumen es

$$\begin{aligned} \int dV &= \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz \\ &= \int_{-a}^a dx (2\sqrt{a^2-x^2})^2 \\ &= 4 \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = 4 \cdot 2a^3 - \frac{4}{3}(a^3 - (-a^3)) = \left(8 - \frac{8}{3}\right)a^3 = \frac{16}{3}a^3 \end{aligned}$$

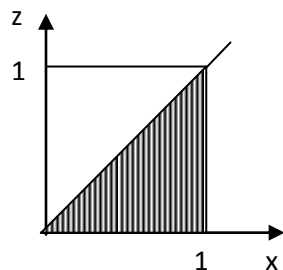
b) La integral a calcular es

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 \text{sen} x^3 dx dy dz$$

Siguiendo la indicación, usamos Fubini para cambiar el orden de las integrales; para esto es necesario cambiar también los límites de integración:



$$\int_0^1 \int_z^1 \int_z^x \text{sen} x^3 dy dx dz$$



$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^x \int_z^x \text{sen} x^3 dy dz dx \\ &= \int_0^1 \text{sen} x^3 dx \left[ \int_0^x \int_z^x dy dz \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \sin x^3 dx \left[ \int_0^x (x-z) dz \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \sin x^3 x^2 dx = \frac{1}{6} (-\cos x^3) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} (1 - \cos(1))
\end{aligned}$$